

**Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України “Київський
політехнічний інститут”**

М.Ю. Артеменко

**СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ
ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ**

**Затверджено Вченою радою НТУУ “КПІ”
як підручник для студентів, які навчаються
за спеціальністю “Електроніка”**

**Київ
НТУУ “КПІ”
2016**

УДК 621.3.01/09
А 86

Гриф надано Вченою радою НТУУ "КПІ"
(протокол № 7 від 6 червня 2016 р.)

Рецензенти: *В.В. Каплун*, д-р техн. наук, проф. (Київський національний університет технологій та дизайну)

А.І. Семенко, д-р техн. наук, проф. (Державний університет телекомунікацій)

Редактор *Ю.С. Ямненко*, д-р техн. наук, проф. (Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут")

Артеменко М. Ю.

А86 Спеціальні розділи теорії електричних кіл. — К.: КПІ, 2016. — 141 с.:іл.

Представлені методи аналізу перехідних електромагнітних процесів в електричних колах постійного та змінного струмів — класичний, операторний та простору станів, а також основи теорії чотириполюсників та електричних кіл з розподіленими параметрами. Висвітлені всі теоретичні питання дисципліни "Спеціальні розділи теорії електричних кіл" бакалаврату спеціальності "Електроніка" та проілюстровані численними прикладами розв'язування задач.

© М. Ю. Артеменко

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

1.1. Загальна характеристика перехідних процесів.....	7
1.1.1. Основні поняття та означення перехідного процесу.....	7
1.1.2. Закони комутації, початкові умови та початкові значення....	9
1.1.3. Методика визначення початкових умов.....	11
1.2. Розрахунок перехідних процесів в колах першого порядку класичним методом та за узагальненою формулою.....	14
1.2.1. Сутність та приклади класичного методу розрахунку перехідних процесів.....	14
1.2.2. Час перехідного процесу в колі першого порядку.....	19
1.2.3. Узагальнена формула для розрахунку перехідних процесів в колі постійного струму першого порядку.....	21
1.2.4. Методика розрахунку перехідних процесів в колі постійного струму першого порядку за узагальненою формулою.....	22
1.2.5. Методика розрахунку перехідних процесів в колі синусоїдного струму першого порядку за узагальненою формулою.....	24
1.3. Формування рівнянь стану електричних кіл та процесів.....	27
1.3.1. Загальні відомості про рівняння стану електричного кола.....	27
1.3.2. Формування рівняння стану електричного кола без особливостей	28
1.3.3. Формування рівняння стану детермінованого процесу.....	33
1.4. Матричний спосіб розв'язання рівняння стану.....	35
1.4.1. Метод перехідної матриці.....	35
1.4.2. Розрахунок матричної експоненти для системи другого порядку.....	37

1.4.3. Розв'язання рівняння стану для кіл постійного струму другого порядку.....	40
1.5. Схемотехнічний спосіб формування та розв'язання рівняння стану.....	41
1.5.1. Загальні положення схемотехнічного способу формування та розв'язання рівняння стану.....	41
1.5.2. Аналіз перехідних режимів у колах 2-го порядку схемотехнічним способом.....	45
1.6. Отримання зображень досліджуваних величин в операторному методі розрахунку перехідних процесів.....	56
1.6.1. Перетворення Лапласа та його властивості.....	56
1.6.2. Знаходження зображень змінних, що досліджуються в перехідному процесі.....	61
1.7. Способи переходу від зображення до оригіналу.....	62
1.7.1. Теорема розкладання.....	62
1.7.2. Застосування теореми розкладання для випадку $n = 2$	65
1.7.3. Формула розкладання за наявності простого нульового кореня.....	67
1.7.4. Алгоритм розрахунку перехідного процесу операторним методом	70
1.7.5. Знаходження характеристичного рівняння для вільної складової перехідного процесу операторним методом.....	70
1.8. Операторні схемні функції в базисі вузлових напруг.....	72
1.8.1. Операторний коефіцієнт передачі за напругою чотириполюсника.....	72
1.8.2. Операторний коефіцієнт передачі за напругою кола з трьома зовні-німи затискачами.....	75

1.8.3. Операторний коефіцієнт передачі за струмом. Операторні перехідні й вхідні опори та провідності.....	77
Контрольні запитання та завдання до розділу 1.....	81
Список літератури до розділу 1.....	82

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

2.1. Загальна характеристика та системи первинних параметрів чотириполіусників.....	84
2.1.1. Основні поняття та класифікація чотириполіусників.....	84
2.1.2. Системи рівнянь лінійного пасивного чотириполіусника.....	86
2.1.3. Експериментальне визначення первинних параметрів чотириполіусника за дослідом холостого ходу та короткого замикання.....	91
2.2. Еквівалентні схеми, перетворення з'єднань та схемні функції чотириполіусників.....	93
2.2.1. Еквівалентні схеми чотириполіусників.....	93
2.2.2. Еквівалентні перетворення стандартних з'єднань чотириполіусників.....	95
2.2.3. Схемні функції чотириполіусника.....	98
2.3. Характеристичні параметри та узгоджений режим роботи чотириполіусника.....	100
2.3.1. Характеристичні опори чотириполіусника.....	100
2.3.2. Узгоджений режим роботи чотириполіусника.....	102
2.3.3. Визначення характеристичних параметрів чотириполіусника з дослідів холостого ходу та короткого замикання.....	106
Контрольні запитання та завдання до розділу 2.....	109
Список літератури до розділу 2.....	109

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Моделювання електромагнітних процесів в електричних колах з розподіленими параметрами.....	111
3.1.1. Загальна характеристика кіл з розподіленими параметрами.....	111
3.1.2. Первинні параметри та диференційні рівняння однорідної довгої лінії.....	114
3.1.3. Синусоїдний режим в однорідній довгій лінії.....	116
3.1.4. Рівняння довгої лінії як чотириполюсника.....	119
3.2. Вторинні параметри однорідної довгої лінії.....	120
3.2.1. Зв'язок вторинних параметрів однорідної довгої лінії з первинними.....	120
3.2.2. Однорідна лінія без спотворень.....	123
3.2.3. Однорідна лінія без втрат.....	126
3.3. Режими біжних, стійних та змішаних хвиль в лінії без втрат.....	128
3.3.1. Вхідний опір однорідної лінії без втрат.....	128
3.3.2. Стійні, біжні та змішані хвилі в довгій лінії без втрат.....	131
3.4. Застосування електричних кіл з розподіленими параметрами.....	135
3.4.1. Чвертьхвильовий трансформатор.....	135
3.4.2. Довга лінія як резонансне коло.....	136
3.4.3. Еквівалентний чотириполюсник для відрізка лінії з розподіленими параметрами.....	138
Контрольні запитання та завдання до розділу 3.....	140
Список літератури до розділу 3.....	140

РОЗДІЛ 1. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

1.1. Загальна характеристика перехідних процесів

1.1.1. Основні поняття та означення перехідного процесу

В першій частині теорії електричних кіл вивчалися усталені процеси в лінійних електричних колах, які характеризуються тим, що струми та напруги або не змінні в часі для кіл постійного струму або є гармонічними функціями часу для кіл синусоїдного струму.

Перехідним називається процес зміни в часі струмів та напруг, який виникає в електричному колі при переході від одного усталеного режиму до іншого внаслідок комутації.

Комутація – це зміна параметрів елементів (наприклад, зміна величини опору резистора) або зміна топології кола, яку на електричній схемі відображають за допомогою ідеальних ключів. Розрізняють такі типи ідеальних ключів: замикаючий (рис.1.1, а, а'), розмикаючий (рис.1.1, б, б'), перемикаючий (рис.1.1, в, в').

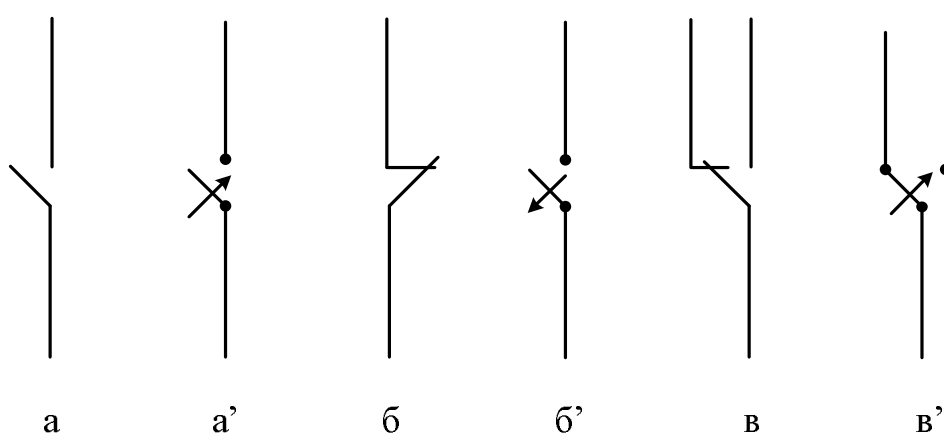


Рис. 1.1. Типи ідеальних ключів

Літерами без штрихів позначені різновиди ключів згідно ДСТУ, літерами зі штрихами – позначення ключів, що використовуються в навчальній літературі. Стрілочка відображає послідовність переходу ключа з попереднього стану (до комутації) в подальший стан (після комутації).

Ідеальні ключі мають такі **властивості**:

- 1) в замкненому стані опір ключа дорівнює нулю;
- 2) в розімкненому стані провідність ключа дорівнює нулю;
- 3) час перемикання ключа дорівнює нулю.

Необхідними умовами виникнення перехідних процесів є:

- наявність у колі хоча б одного реактивного елемента, оскільки саме в часовому процесі переходу від одного усталеного режиму до іншого змінюється накопичена в цьому елементі електромагнітна енергія;
- наявність саме такої комутації, при якій замикаючий ключ знаходиться під ненульовою напругою, або розмикаючий ключ проводить ненульовий струм, оскільки за протилежних умов комутація не змінює стану електричного кола.

Приклад 1-1 В схемі електричного кола на рис. 1.2, а перехідного процесу не відбувається, оскільки в усталеному режимі в колі до комутації $I_{R2} = I_C = 0$; $U_{R2} = 0$, і напруга на ключі, що замикається, дорівнює нулю.

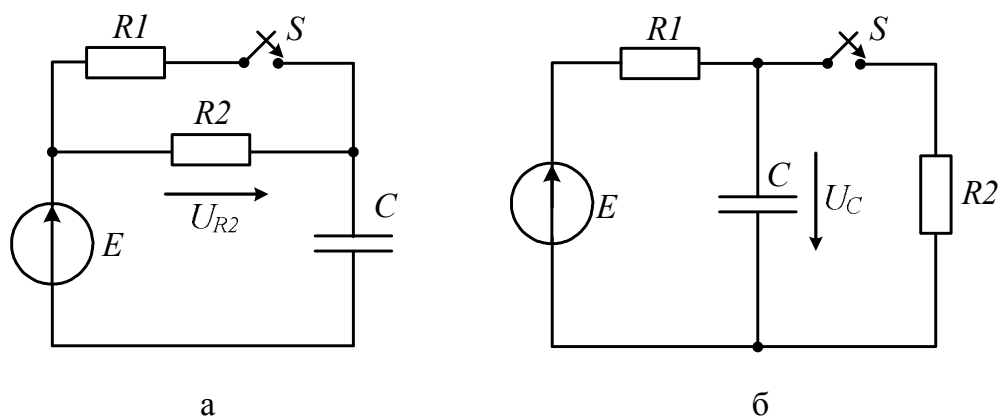


Рис. 1.2. Приклади наявності перехідних процесів в ЕК:

а – перехідний процес не відбувається; б – перехідний процес відбувається

Напруга на ключі після комутації також дорівнює нулю за властивістю ідеального ключа, тому струми та напруги в такому колі в процесі комутації не змінюються.

В схемі електричного кола на рис. 1.2, б перехідний процес відбувається, оскільки в усталеному режимі в колі до комутації ключ знаходиться під ненульовою напругою: $U_s = U_C = E$. Напруга на ключі після комутації стає рівною нулю, тому струми та напруги в такому колі в перехідному процесі будуть змінюватися, забезпечуючи нове усталене значення напруги на конденсаторі.

1.1.2. Закони комутації, початкові умови та початкові значення

Розглянемо електричні змінні, що визначають енергію електромагнітного поля: струм $i_L(t)$ котушки індуктивності L та напругу $u_C(t)$ на конденсаторі ємністю C . Відповідні значення магнітної та електричної енергій становлять $w_L = L \frac{i_L^2}{2}$; $w_C = C \frac{u_C^2}{2}$. Швидкість зміни в часі енергії характеризує потужність $p = \frac{dw}{dt}$. Припускаємо, що $i_L(u_C)$ в момент комутації t_0 змінюється стрибкоподібно (рис. 1.3, а).

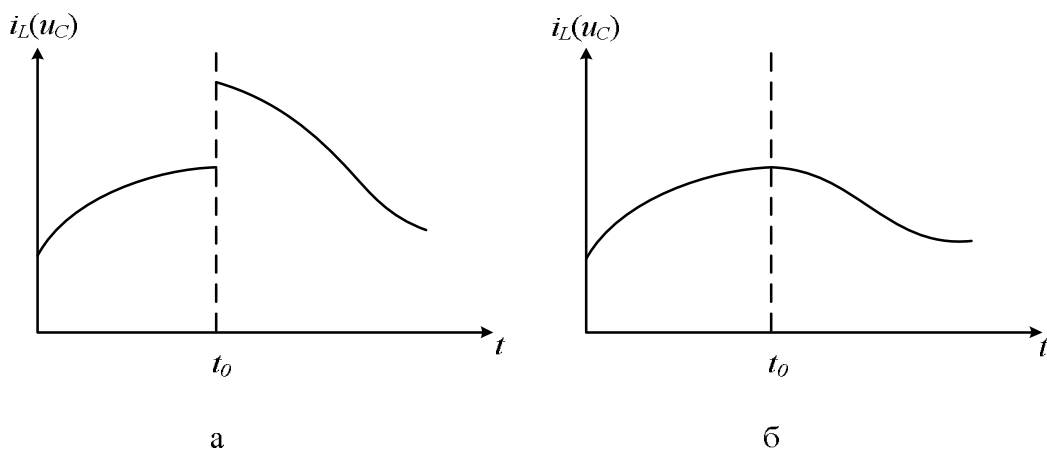


Рис. 1.3. Зміна струму котушки (напруги конденсатора) в процесі комутації: а – не
можлива, б – можлива

Це призводить до нескінченної величини миттєвої потужності $p(t_0)$, яка не може бути забезпечена жодним фізичним джерелом. Отже, для електричних кіл величини $i_L(u_C)$ є неперервними функціями часу, в тому числі в момент комутації t_0 (рис. 1.3, б).

Зазвичай цей момент приймають рівним нулю ($t_0 = 0$), тобто відлік часу починають саме з моменту комутації. Тоді **закони комутації** записують у вигляді

$$i_L(-0) = i_L(+0); \quad (1.1)$$

$$u_C(-0) = u_C(+0), \quad (1.2)$$

та формулюють наступним чином: у початковий момент після комутації струм в котушці індуктивності (напруга на конденсаторі) залишається саме таким (такою), яким він був (вона була) безпосередньо перед комутацією. Електричні змінні, що однозначно визначають запас електромагнітної енергії в довільний момент часу та для яких виконуються закони комутації (струм котушки індуктивності i_L та напруга на конденсаторі u_C), називаються **змінними стану**. Усі інші електричні змінні (i_R, u_R, i_C, u_L) при комутації можуть змінюватися стрибкоподібно.

Ліві частини рівнянь (1.1), (1.2) називаються **початковими умовами**. Розрізняють **нульові початкові умови**, коли усі значення початкових умов нульові, тобто реактивні елементи перед комутацією не мають запасу енергії. **Ненульові початкові умови** мають місце, коли хоча б один із реактивних елементів має ненульову енергію. **Початковими значеннями** називаються праві частини рівняння (1.1), (1.2) та значення усіх інших змінних в момент часу безпосередньо після комутації, які визначаються на

основі законів комутації й законів Кірхгофа для струмів та напруг відповідно до топології електричного кола, в якому відбувається перехідний процес.

1.1.3. Методика визначення початкових умов

Початкові умови визначаються в усталеному режимі електричного поля до комутації. Зокрема, усталений режим в колі постійного струму характеризується сталістю величин струмів та напруг, в тому числі не змінюються у часі й змінні стану:

$$i_{Lycm} = const; u_{Cycm} = const.$$

При цьому похідні змінних стану є нульовими:

$$u_{Lycm} = L \frac{di_{Lycm}}{dt} = 0; i_{Cycm} = C \frac{du_{Cycm}}{dt} = 0.$$

Нульовій напрузі відповідає режим короткого замикання (закоротки), нульовому струмові – режим холостого ходу (розриву ланцюга). Таким чином, початкові умови в колі постійного струму знаходяться в схемі до комутації при видалених реактивних елементах, причому котушки індуктивності видаляються шляхом закоротки (оскільки $u_{Lycm} = 0$); конденсатори – шляхом розриву ланцюга (оскільки $i_{Cycm} = 0$). Величину $u_C(-0)$ знаходять як усталене значення напруги між точками вмикання конденсатора, $i_L(-0)$ – як усталене значення струму в перемичці, що забезпечує режим закоротки котушки індуктивності. Схематично процедуру перетворення схеми для знаходження початкових умов можна зобразити наступним чином (рис. 1.4):

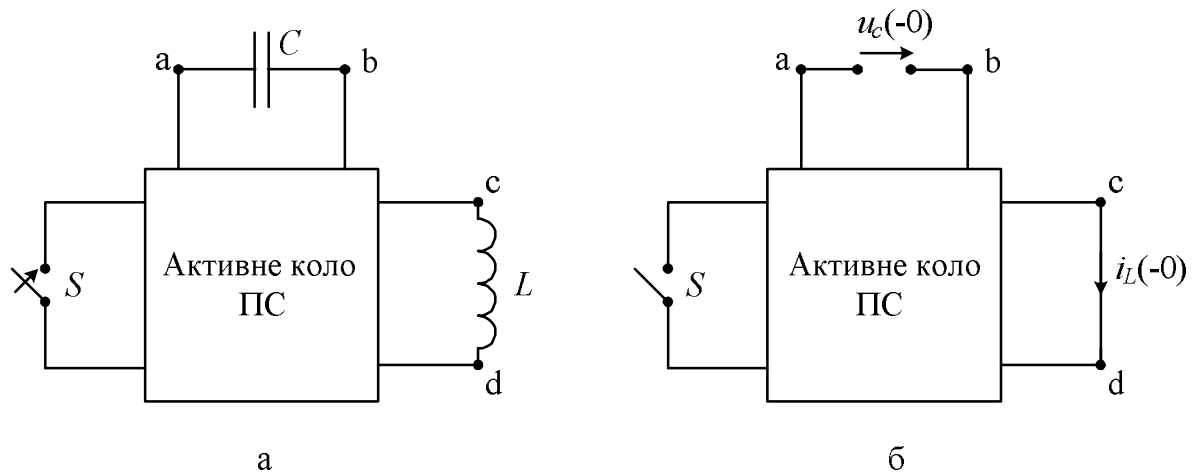


Рис. 1.4. Процедура перетворення схеми для знаходження початкових умов: а – первісна схема; б – еквівалентна схема з позначеними початковими умовами

Приклад 1-2. Визначити початкові умови заданого кола з джерелом постійного струму (рис. 1.5, а).

1) Забезпечуємо стан схеми до комутації (ключ в замкненому стані). Видаляємо всі реактивні елементи: конденсатор – шляхом розриву ланцюга, котушку – шляхом закоротки. В результаті отримуємо схему постійного струму на рис. 1.5, б.

2) Розраховуючи схему постійного струму, визначаємо початкові умови:

$$i_L(-0) = \frac{E}{R_1 + R_2}; u_C(-0) = i_L(-0)R_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = \frac{E}{1 + R_1 G_2},$$

де $G_2 = 1 / R_2$.

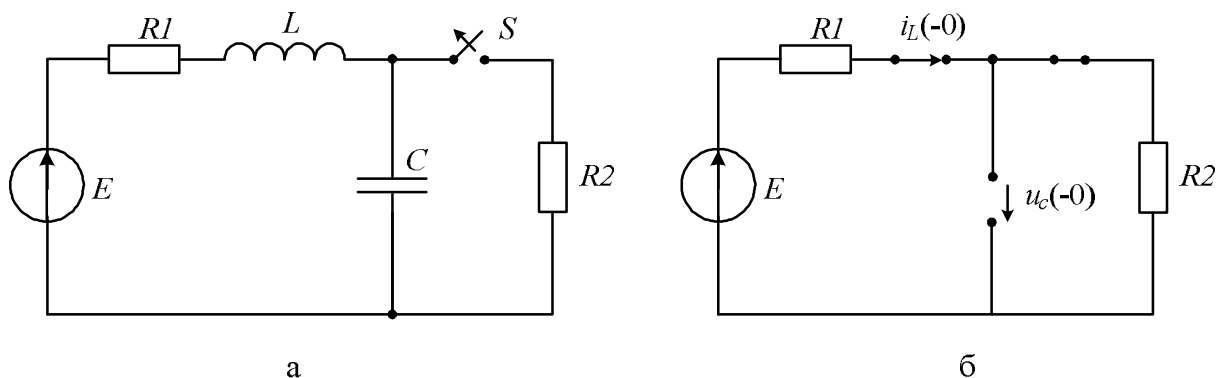


Рис. 1.5. Схеми для знаходження початкових умов перехідного процесу: а – первісна схема; б – еквівалентна схема з позначеними початковими умовами

Усталений режим кола синусоїдного струму розраховують символьним методом, знайшовши комплексні амплітуди змінних стану

$\dot{I}_{Lm} = I_m e^{j\varphi_I}$, $\dot{U}_{Cm} = U_m e^{j\varphi_U}$ та відповідні їм миттєві значення:

$$u_{cycm}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U); i_{Lycm}(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_I).$$

Початкові умови визначають, прирівнявши в отриманих виразах до нуля значення часу:

$$u_C(-0) = u_{cycm}(t)|_{t=0} = U_{Cm} \cos \varphi_U = \operatorname{Re}(\dot{U}_{Cm});$$

$$i_L(-0) = i_{Lycm}(t)|_{t=0} = I_m \cos \varphi_I = \operatorname{Re}(\dot{I}_{Lm}).$$

Приклад 1-3. Розрахувати початкові умови у схемі попереднього прикладу з джерелом змінної напруги $e(t) = 100 \cos(1000t + \pi/6)$ (рис. 1.6), якщо $L = 1$ мГн, $C = 500$ мкФ, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом.

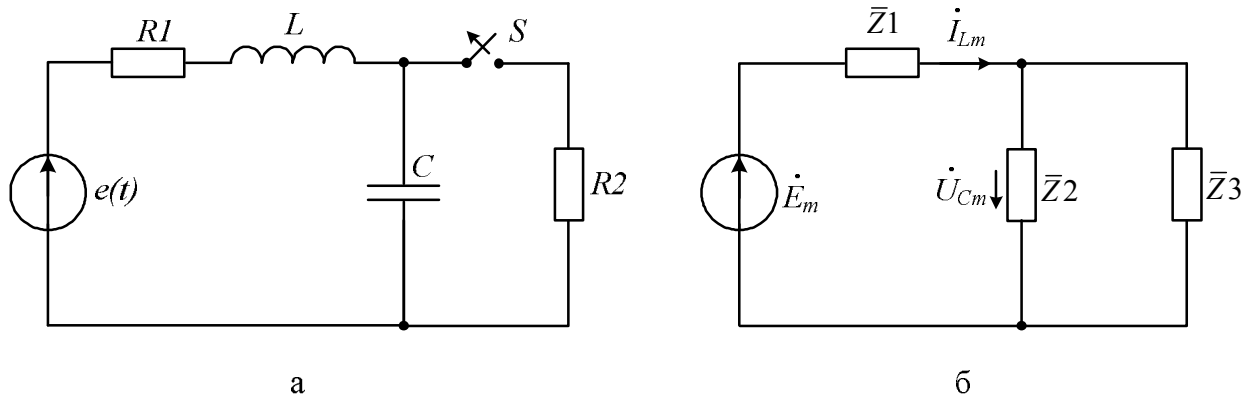


Рис. 1.6. Схеми для знаходження початкових умов перехідного процесу:
а – первісна схема, б – комплексна еквівалентна схема з позначеними комплексними амплітудами початкових умов

Складемо комплексну схему заміщення кола до комутації (рис. 1.6, б), для якої

$$\dot{E}_m = 100e^{j\pi/6} = 86,67 + j50 \text{ В};$$

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L = 5 + j \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 5 + j \text{ Ом};$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^3 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = -2j \text{ Ом};$$

$$\bar{Z}_3 = R_2 = 10 \text{ Ом}.$$

З аналізу отриманого кола знаходимо комплексні амплітуди:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{Cm} &= \frac{\dot{E}_m}{1 + \bar{Z}_1(\bar{Y}_2 + \bar{Y}_3)} = \frac{\dot{E}_m}{1 + \bar{Z}_1(j\omega C + G_2)} = \\ &= \frac{86,67 + j50}{1 + (5 + j)(0,5j + 0,1)} = 27,91 - j22,57 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{E}_m - \dot{U}_{Cm}}{\bar{Z}_1} = \frac{86,67 + j50 - (27,91 - j22,57)}{5 + j} = 14,08 + j11,7 \text{ А}.$$

Шукані початкові умови дорівнюють, відповідно:

$$u_C(-0) = \text{Re}(\dot{U}_{Cm}) = 27,91 \text{ В};$$

$$i_L(-0) = \text{Re}(\dot{I}_{Lm}) = 14,08 \text{ А}.$$

1.2. Розрахунок перехідних процесів в колах першого порядку класичним методом та за узагальненою формулою

1.2.1. Сутність та приклади класичного методу розрахунку перехідних процесів

Даний метод полягає у складанні диференційного рівняння відносно шуканої змінної, що описує стан кола після комутації; розв'язанні цього рівняння відомим математичним методом з наданням нового фізичного змісту складовим розв'язку, які притаманні теорії електричних кіл.

Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом прослідкуємо на прикладі увімкнення джерела постійної напруги до послідовного RC - кола (рис. 1.7).

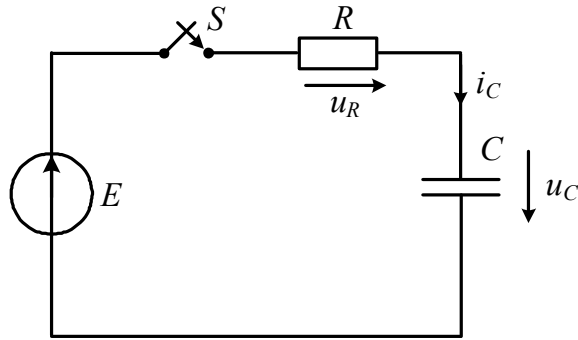


Рис.1.7. Схема увімкнення джерела постійної напруги до послідовного RC - кола

1) Визначення початкових умов:

$$u_C(-0) = 0,$$

оскільки до комутації конденсатор не був під'єднаний до будь-яких джерел енергії.

2) Визначення початкових значень відповідно до закону комутації:

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0.$$

3) Складання диференційного рівняння для шуканої змінної $u_C(t)$ в колі після комутації на основі законів Кірхгофа, Ома та компонентного рівняння для реактивного елемента.

За другим законом Кірхгофа для єдиного контуру, що утворюється після комутації,

$$E = u_R + u_C;$$

за законом Ома для резистора

$$u_R = Ri_C = RC \frac{du_C}{dt},$$

де $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ – компонентне рівняння конденсатора.

Підставивши в рівняння Кірхгофа наведені вирази, після перетворень отримаємо:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E.$$

Величину $\tau_c = RC$, що має розмірність часу [$Ом \cdot Ф = Ом \cdot А \cdot с / В = с$], називають **сталю часу заряду конденсатора**.

Порядком електричного кола називають порядок диференційного рівняння, яким описується коло після комутації. Зазвичай порядок кола співпадає з кількістю його реактивних елементів, тобто у даному випадку розраховується перехідний процес в колі першого порядку з конденсатором. Підставивши значення сталої часу, отримаємо шукане диференційне рівняння:

$$\tau_c \frac{du_c}{dt} + u_c = E. \quad (1.3)$$

4) Розв'язання отриманого диференційного рівняння для шуканої змінної $u_c(t)$.

Як відомо з математики, розв'язок диференційного рівняння зі сталими коефіцієнтами знаходиться у вигляді двох складових, у даному випадку двох часових функцій. Перша складова – загальний розв'язок однорідного рівняння, що утворюється з (1.3) шляхом обнулення правої частини. В теорії електричних кіл це вільна складова перехідного процесу, зумовлена початковим запасом енергії в реактивних елементах кола після відключення джерела. Вільна складова перехідного процесу шуканої змінної позначається літерами $_{ВЛ}$, рівняння для її визначення має вигляд:

$$\tau_c \frac{du_{СВЛ}}{dt} + u_{СВЛ} = 0. \quad (1.4)$$

Замінивши оператор диференціювання в рівнянні (1.4) на оператор алгебраїчної змінної p , отримаємо характеристичне рівняння кола:

$$\tau_c p + 1 = 0,$$

розв'язок якого $p_1 = -\frac{1}{\tau_c}$. Відмітимо, що будь-яка інша змінна кола, що розглядається, буде описуватися диференціальним рівнянням з таким самим характеристичним рівнянням.

Отриманий корінь характеристичного рівняння корінь визначає вільну складову перехідного процесу.

$$u_{CBЛ}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (1.5)$$

де A – стала інтегрування, що далі буде визначена із застосуванням закону комутації.

Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1.3) в теорії електричних кіл називають вимушеною складовою перехідного процесу, що є усталеною реакцією кола на дію джерела. Для кола постійного струму вимушена (усталена) складова знаходиться з рівняння

$$(1.3) \text{ при } \frac{du_{CBМ}}{dt} = 0 :$$

$$u_{CBМ}(t) = E.$$

Для отримання розв'язку диференціального рівняння (1.3) $u_c(t)$ додаємо вільну та вимушену складові і отримуємо:

$$u_c(t) = u_{CBЛ}(t) + u_{CBМ}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_c}} + E. \quad (1.6)$$

5) Розрахунок сталої інтегрування A проводимо на підставі законів комутації.

Початкове значення шуканої змінної, згідно п.2, дорівнює нулю:

$$u_c(+0) = 0.$$

Підставивши у вираз (1.6) значення $t = 0$, прирівнюємо праву частину виразу до нуля:

$$Ae^{-\frac{0}{\tau_c}} + E = 0,$$

звідки

$$A = -E.$$

6) Остаточного знаходимо вільну складову та усю часову функцію перехідного процесу, підставивши величину сталої інтегрування у вирази (1.5), (1.6):

$$u_{CBЛ}(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau_c}};$$
$$u_c(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau_c}} + E = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}).$$

Розглянемо перехідний процес увімкнення джерела постійної напруги до послідовного RL -кола (рис. 1.8).

Відповідно до алгоритму розрахунку перехідних процесів класичним методом знаходимо початкове значення змінної стану

$$i_L(+0) = i_L(-0) = 0.$$

За другим законом Кірхгофа в колі після комутації $u_R + u_L = E$, за законом Ома $u_R = i_L R$, компонентне рівняння котушки індуктивності $u_L = L \frac{di_L}{dt}$. Отже, диференціальне рівняння для шуканої змінної

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = E.$$

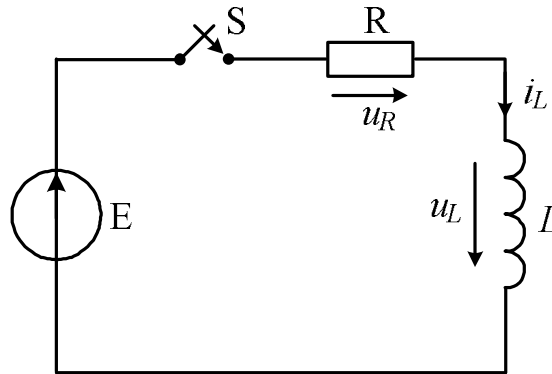


Рис. 1.8. Схема увімкнення джерела постійної напруги до послідовного RL -кола

Розділивши обидві його частини на R , отримаємо нормоване диференціальне рівняння

$$\tau_L \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{E}{R}, \quad (1.7)$$

де $\tau_L = LG = \frac{L}{R}$ стала часу кола першого порядку з індуктивністю.

За формою запису отримане рівняння (1.7) співпадає з рівнянням (1.6) для напруги конденсатора в попередньому прикладі, а, отже, воно має такий самий розв'язок:

$$i_L(t) = i_{L_{BL}}(t) + i_{L_{BM}}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau_L}} + \frac{E}{R} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}} + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}).$$

1.2.2. Час перехідного процесу в колі першого порядку

Побудуємо графіки перехідного процесу заряду конденсатора та його складових (рис. 1.9).

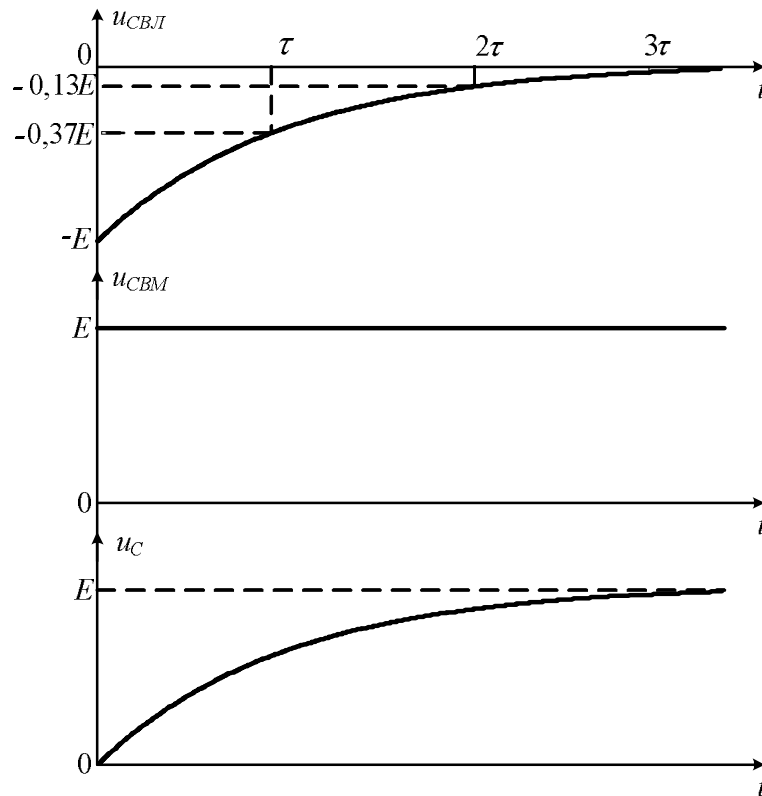


Рис. 1.9. Графіки перехідного процесу в колі на рис. 1.7:

а – вільна складова, б – вимушена складова, в – перехідна напруга конденсатора.

Знайдемо відношення значень вільної складової перехідного процесу в моменти часу, кратні τ_C :

$$\frac{u_{CBЛ}(\tau_C)}{u_{CBЛ}(+0)} = \frac{-Ee^{-\frac{\tau_C}{\tau_C}}}{-Ee^{-\frac{0}{\tau_C}}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2,718} \approx 0,37;$$

$$\frac{u_{CBЛ}(2\tau_C)}{u_{CBЛ}(+0)} = \frac{-Ee^{-\frac{2\tau_C}{\tau_C}}}{-E} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,13;$$

$$\frac{u_{CBЛ}(3\tau_C)}{u_{CBЛ}(+0)} = \frac{1}{e^3} \approx 0,05.$$

Можна розрахувати, що в колі першого порядку вільна складова становить один відсоток від початкового значення при $t = 4,6\tau_C$:

$$\frac{u_{CBЛ}(4,6\tau_C)}{u_{CBЛ}(+0)} \approx 0,01.$$

Тому вважається, що **час перехідного процесу** в колі першого порядку, тобто інтервал часу, впродовж якого вільна складова перехідного процесу зменшується в $20 \div 100$ разів, складає $t_{mn} = (3 \div 5)\tau_C$.

1.2.3. Узагальнена формула для розрахунку перехідних процесів в колі постійного струму першого порядку

Узагальнюючи розглянуті приклади, можна записати єдине узагальнене диференціальне рівняння, що описує коло першого порядку постійного струму в перехідному процесі після комутації. Ввівши узагальнену змінну стану $x = i_L \cup u_C$, матимемо диференціальне рівняння для її знаходження:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = x_{BM}, \quad (1.8)$$

де $\tau = \tau_L \cup \tau_C$.

Сталу за величиною вимушену складову перехідного процесу x_{BM} у правій частині рівняння (1.8) можна розглядати як значення, до якого прямує шукана змінна $x(t)$ по закінченні перехідного процесу, тобто при $t \rightarrow \infty$:

$$x_{BM} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty).$$

Таким чином, остаточно узагальнене диференціальне рівняння в зазначеному колі має вигляд:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = x(\infty). \quad (1.9)$$

Розв'язком рівняння (1.9) є сума вільної та вимушеної складових:

$$x(t) = x_{BL}(t) + x_{BM}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + x(\infty).$$

Сталу інтегрування A знаходимо з закону комутації для узагальненої змінної стану в момент часу $t = 0$:

$$x(0) = A + x(\infty),$$

звідси

$$A = x(0) - x(\infty).$$

Остаточна узагальнена формула для розрахунку перехідного процесу набуває вигляду:

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1.10)$$

Отримана формула (1.10) є підсумком усіх етапів класичного методу розрахунку перехідних процесів в колі постійного струму першого порядку, тому їх можна замінити значно простішою процедурою знаходження визначальних параметрів розв'язку: $x(0)$, $x(\infty)$, τ .

1.2.4. Методика розрахунку перехідних процесів в колі постійного струму першого порядку за узагальненою формулою

1) Величина $x(0)$ знаходиться за методикою визначення початкових умов в колі до комутації.

2) Усталене значення $x(\infty)$ знаходиться за методикою визначення усталених значень, проте в колі після комутації.

3) Стала часу розраховується за формулою: $\tau = R_E C \cup L / R_E$, де R_E – еквівалентний опір кола після комутації відносно точок підключення реактивного елемента при видалених джерелах (джерела напруги

видаляються шляхом закоротки, джерела струму – шляхом розриву ланцюга).

Приклад 1-4. Розрахувати перехідний процес в заданому колі (рис. 1.10) за узагальненою формулою.

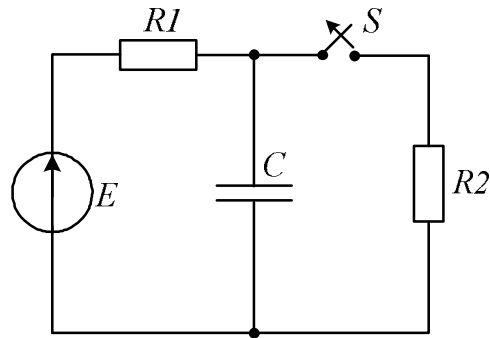


Рис. 1.10. Схема кола першого порядку для розрахунку перехідного процесу

Узагальнена формула для напруги конденсатора має вигляд:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

1) $u_C(0)$ знаходимо в колі до комутації, видаливши конденсатор, та знайшовши напругу між точками його під'єднання (рис. 1.11, а):

$$u_C(0) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

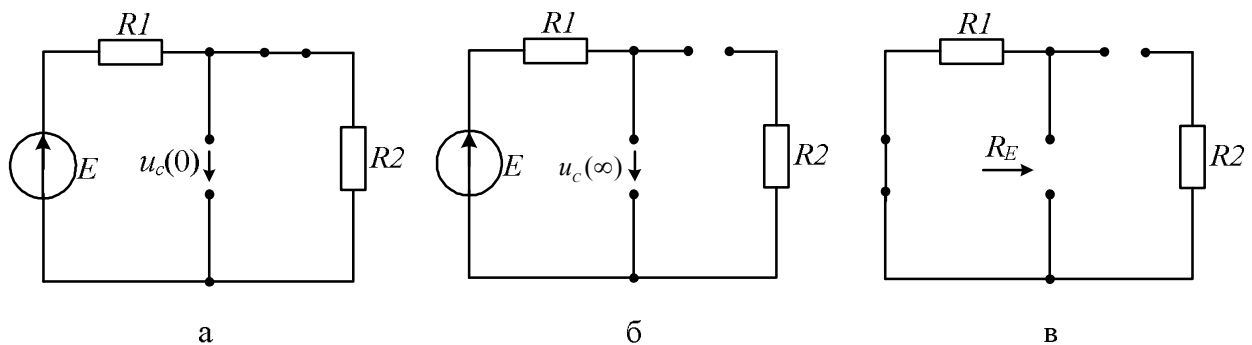


Рис. 1.11.Схеми для визначення параметрів перехідного процесу:

а – $u_C(0)$, б – $u_C(\infty)$, в – R_E .

2) Значення $u_C(\infty)$ знаходимо в колі після комутації, видаливши конденсатор та знайшовши напругу між точками його під'єднання (рис. 1.11, б):

$$u_C(\infty) = E.$$

3) Еквівалентний опір R_E розрахуємо в колі після комутації при видалених джерелах (рис. 1.11, в):

$$R_E = R_1.$$

Знаходимо значення сталої часу $\tau = \tau_C = R_1 C$ та різниці значень

$$u_C(0) - u_C(\infty) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} - E = -E \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Формула перехідного процесу в заданому колі має вигляд

$$u_C(t) = E \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right).$$

1.2.5. Методика розрахунку перехідних процесів в колі синусоїдного струму першого порядку за узагальненою формулою

Узагальнена формула для розрахунку перехідного процесу в колі першого порядку синусоїдного струму має вигляд:

$$x(t) = x_{BM}(t) + [x(0) - x_{BM}(0)] e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (1.11)$$

де $x_{BM}(t)$ – вимушена складова шуканої змінної в колі після комутації.

Відповідна методика розрахунку за узагальненою формулою (1.11) є наступною.

1) Величина $x(0)$ знаходиться за методикою визначення початкових умов в колі синусоїдного струму до комутації.

2) Синусоїдна функція $x_{BM}(t)$ знаходиться в колі після комутації символьним методом. Значення $x_{BM}(0)$ отримують, прийнявши в попередньому виразі $t = 0$.

3) Сталу часу τ розраховують аналогічно колу постійного струму.

Приклад 1-5. Розрахувати перехідний процес для змінної стану в колі першого порядку (рис. 1. 12), якщо $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $L = 1$ мГн, $e(t) = 10\cos(1000t + \pi/3)$ В.

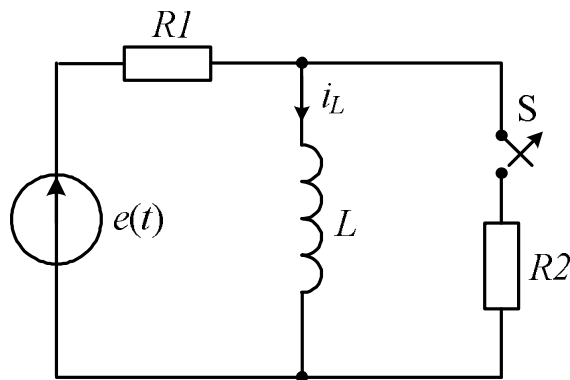


Рис. 1.12. Схема кола першого порядку для розрахунку перехідного процесу

Для знаходження початкових умов складемо комплексну схему заміщення кола до комутації (рис. 1.13, а), в якій

$$\dot{E}_m = 10e^{j\pi/3} = 5 + j8,67 \text{ В}; \bar{Z}_1 = R_1 = 1 \text{ Ом}; \bar{Z}_2 = j\omega L = j10^3 \cdot 10^{-3} = j \text{ Ом}; \bar{Z}_3 = R_2 = 2 \text{ Ом}.$$

З аналізу отриманого кола знаходимо комплексну амплітуду струму:

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{E}_m}{\bar{Z}_1 + \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}} \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{5 + j8,67}{1 + \frac{2j}{j+2}} \frac{2}{j+2} = 5,54 + j0,36 \text{ A};$$

Тоді

$$i_L(0) = \text{Re}(\dot{I}_{Lm}) = 5,54 \text{ A}.$$

Для знаходження вимушеної складової перехідного процесу складемо комплексну схему заміщення кола після комутації (рис. 1.13, б).

$$\dot{I}_{Lm1} = \frac{\dot{E}_m}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{5 + j8,67}{1 + j} = 6,83 + j1,83 \text{ A}.$$

Знайденій комплексній амплітуді відповідає миттєве значення

$$i_{LBM}(t) = 7,07 \cos(1000t + 0,26) \text{ A}.$$

Прийнявши в останньому виразі $t = 0$, отримуємо значення

$$i_{LBM}(0) = 7,07 \cos 0,26 = 6,83 \text{ A}.$$

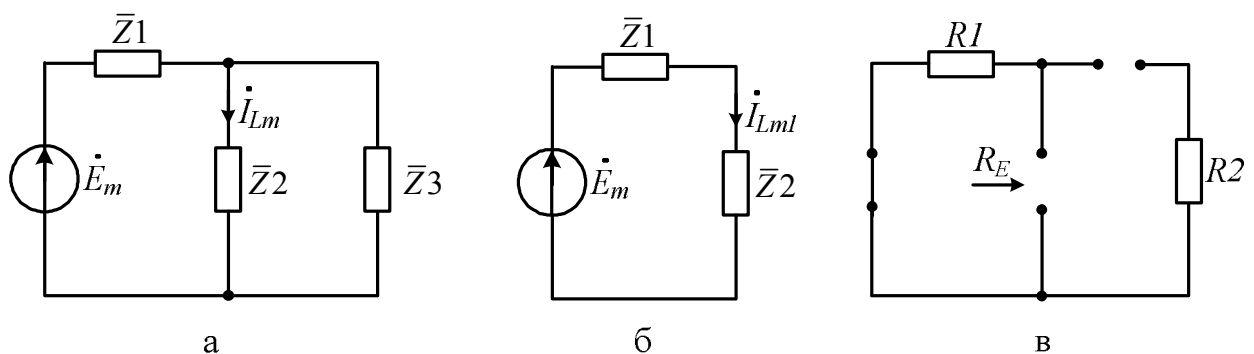


Рис. 1.13. Схеми для визначення параметрів перехідного процесу

Еквівалентний опір R_E розрахуємо в колі після комутації при видаленому джерелі (рис. 1.13, в): $R_E = R_1 = 1 \text{ Ом}$.

Знаходимо значення сталої часу

$$\tau = \tau_L = \frac{L}{R_1} = \frac{10^{-3}}{1} = 1 \text{ мс}.$$

Підставивши знайдені параметри в формулу (1.11), отримаємо вираз для перехідного процесу

$$i_L(t) = 7,07 \cos(1000t + 0,26) - 1,29e^{-1000t} \text{ А}.$$

1.3. Формування рівнянь стану електричних кіл та процесів

1.3.1. Загальні відомості про рівняння стану електричного кола

Нагадаємо, що **змінними стану** електричного кола називаються електричні змінні, що залишаються неперервними під час перехідних процесів, тобто струми котушок індуктивності та напруги конденсаторів. Нехай в загальному випадку лінійне електричне коло містить l котушок індуктивності та c конденсаторів. Розташувавши змінні стану у вигляді вектора, утворюємо **вектор змінних стану**:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} i_{L1} \\ \dots \\ i_{Ll} \\ u_{C1} \\ \dots \\ u_{Cc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{pmatrix}.$$

Розмірність вектора змінних стану $n = l + c$, якщо електричне коло не має особливостей, тобто відсутні контури з елементів E , C , а також відсутні

вузли, що складаються з елементів J, L . За наявності k таких особливостей розмірність вектора змінних стану $n = l + c - k$.

Розрахунок перехідних процесів **методом змінних стану** полягає у складанні та розв'язанні системи рівнянь стану (системи n диференціальних рівнянь першого порядку відносно змінних стану, записаних у формі Коші, тобто усі похідні знаходяться у лівих частинах рівнянь). Матрична форма **рівняння стану** має вигляд :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t), \quad (1.12)$$

де $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ – вектор змінних стану; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – квадратна

матриця розмірності n сталих коефіцієнтів a_{ij} , які залежать від способу

з'єднання та параметрів елементів кола; $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \cdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}$ – вектор незалежних

змінних, що визначаються часовими залежностями струмів та напруг

джерел енергії; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$ – матриця сталих коефіцієнтів розмірності

$n \times m$, що також залежать від способу з'єднання та параметрів елементів кола.

1.3.2. Формування рівняння стану електричного кола без особливостей

В колі без особливостей розмірність вектора змінних стану дорівнює сумарній кількості реактивних елементів $n = l + c$. Оскільки компонентні рівняння реактивних елементів мають вигляд $L \frac{di_L}{dt} = u_L$; $C \frac{du_C}{dt} = i_C$, то,

помноживши кожне скалярне рівняння системи (1.12) на параметр відповідного реактивного елемента та опускаючи залежність векторів від часу, отримаємо лінійну систему рівнянь у матрично-векторній формі

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}'\mathbf{x} + \mathbf{B}'\mathbf{f}, \quad (1.13)$$

де $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{i}_C \end{bmatrix}$ – вектор, що складається з напруг котушок індуктивності та струмів конденсаторів.

Елементи матриць \mathbf{A}' та \mathbf{B}' визначаються за формулами

$$a'_{ij} = \frac{y_i}{x_j} \Big|_*; b'_{ij} = \frac{y_i}{f_j} \Big|_*,$$

де знак $*$ позначає прирівнювання до 0 усіх інших змінних з векторів \mathbf{x} та \mathbf{f} , що не входять до розрахункових формул.

Приклад 1-6. Сформулювати лінійну систему рівнянь у матрично-векторній формі (1.13) для заданої на рис. 1.14 схеми та записати формули для визначення коефіцієнтів a'_{12}, b'_{21} .

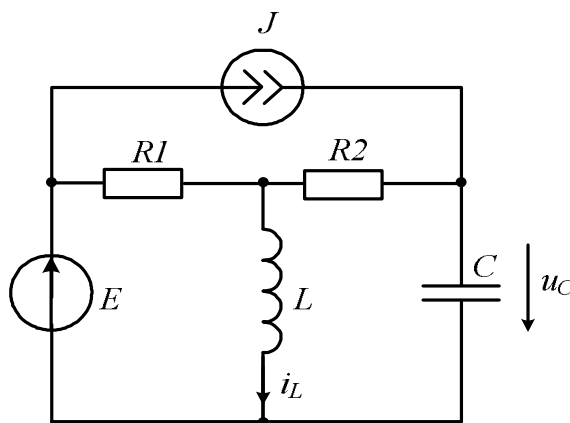


Рис. 1.14. Схема для визначення коефіцієнтів рівняння стану

Оскільки схема, що розглядається, не є особливою, розмірність вектора змінних стану \mathbf{x} дорівнює кількості реактивних елементів, тобто двом, такою самою є розмірність вектора незалежних змінних \mathbf{f} внаслідок того, що в схемі наявні саме два джерела енергії. Отже, розгорнута система векторно-матричних рівнянь у формі (1.13) має вигляд

$$\begin{Bmatrix} u_L \\ i_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J \\ E \end{Bmatrix}.$$

З розгляду першого скалярного рівняння отриманої системи маємо вираз:

$$u_L = a'_{11}i_L + a'_{12}u_C + b'_{11}J + b'_{12}E.$$

Звідки, прирівнюючи до нуля змінні лівої частини, окрім змінної u_C при коефіцієнті a'_{12} , маємо

$$a'_{12} = \left. \frac{y_1}{x_2} \right|_* = \left. \frac{u_L}{u_C} \right|_{i_L, J, E = 0}.$$

Аналогічно з розгляду другого скалярного рівняння

$$b'_{21} = \left. \frac{y_2}{f_1} \right|_* = \left. \frac{i_C}{J} \right|_{i_L, u_C, E = 0}.$$

Для знаходження конкретних значень коефіцієнтів a' та b' потрібно, аналізуючи відповідні схеми постійного струму за умов, відзначених знаком $*$, знайти коефіцієнти передачі струмів та напруг, що їх визначають. При цьому умовам $i_L = 0, J = 0$ відповідає розрив ланцюга, де встановлений відповідний елемент L або J ; умовам $u_C = 0, E = 0$ відповідає замикання цих елементів E, C .

Приклад 1-7. Сформувати рівняння стану для дослідження перехідного процесу в колі, наведеному на рис. 1.15.

Формуємо трафарет алгебраїчної системи рівнянь для заданої схеми після комутації, враховуючи, що вона містить два реактивні елементи L, C та одне джерело E :

$$\begin{Bmatrix} u_L \\ i_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{Bmatrix} E.$$

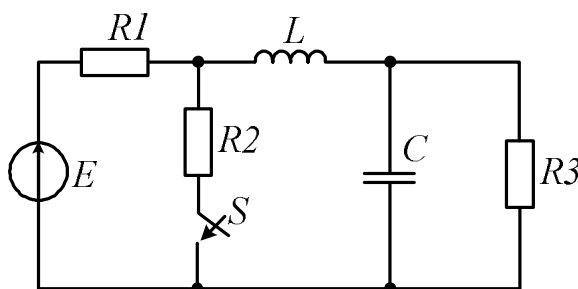


Рис. 1.15. Схема для дослідження перехідного процесу

Визначаємо аналітичний вираз для першого невідомого коефіцієнта:

$$a'_{11} = \frac{u_L}{i_L} \Big|_{u_C = 0; E = 0}.$$

Формуємо схему (рис. 1.16, а), що відповідає цьому виразу.

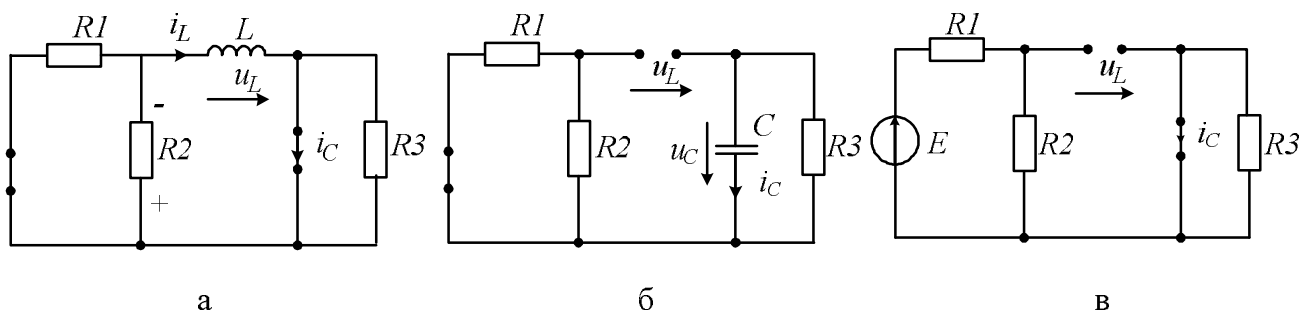


Рис. 1.16. Еквівалентні схеми для знаходження коефіцієнтів рівняння стану схеми

на рис. 1.15: а – a'_{11}, a'_{21} ; б – a'_{12}, a'_{22} ; в – b'_1, b'_2 .

З аналізу зазначеної схеми доходимо висновку, що

$$u_L = -i_L \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; a'_{11} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Аналогічно знаходимо вирази для інших коефіцієнтів.

Схема 1.16, б:

$$a'_{12} = \frac{u_L}{u_C} \Big|_{i_L = 0; E = 0} = -1.$$

Схема 1.16, а:

$$a'_{21} = \frac{i_C}{i_L} \Big|_{u_C = 0; E = 0} = 1.$$

Схема 1.16, б:

$$a'_{22} = \frac{i_C}{u_C} \Big|_{i_L = 0; E = 0} = -\frac{1}{R_3} = -G_3.$$

Схема 1.16, в:

$$b'_1 = \frac{u_L}{E} \Big|_{i_L = 0; u_C = 0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; b'_2 = \frac{i_C}{E} \Big|_{i_L = 0; u_C = 0} = 0.$$

Зауважимо, що для будь-якої схеми з елементами L, C справедлива рівність

$$a'_{12} = -a'_{21},$$

яка є наслідком принципу взаємності та може бути використана для перевірки вірності визначення коефіцієнтів.

Безпосереднє формування рівняння стану здійснюється на підставі співвідношення

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{i}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{Bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

де $\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{Bmatrix}$ – матриця параметрів реактивних елементів, звідки

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{A}' \mathbf{x} + \mathbf{B}' \mathbf{f}) = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}') \mathbf{x} + (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}') \mathbf{f},$$

тобто,

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}'; \mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}'.$$

Наприклад, матричні коефіцієнти рівняння стану з попереднього прикладу розраховують так:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}' = \begin{Bmatrix} a'_{11}/L & a'_{12}/L \\ a'_{21}/C & a'_{22}/C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{G_3}{C} \end{Bmatrix}; \mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}' = \begin{Bmatrix} b'/L_1 \\ b'_2/C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Кінцевий вираз рівняння стану у випадку, що розглядається, має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{G_3}{C} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \\ 0 \end{Bmatrix} E.$$

1.3.3. Формування рівняння стану детермінованого процесу

Нехай скалярний детермінований процес $s(t)$ є розв'язком однорідного диференційного рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$s^{(n)}(t) + c_{n-1} s^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 s'(t) + c_0 s(t) = 0.$$

Увівши вектор змінних стану $\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ s'(t) \\ \dots \\ s^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$,

отримаємо для нього однорідне рівняння стану

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{s}(t) \quad (1.14)$$

з матрицею сталих коефіцієнтів

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1-8. Сформувати рівняння стану для гармонічного процесу $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Будь-яке гармонічне коливання задовольняє однорідне диференціальне рівняння

$$s''(t) + \omega^2 s(t) = 0.$$

Відповідно до формули (1.14)

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ s'(t) \end{pmatrix}; \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для однозначного завдання гармонічного процесу має бути відомий вектор початкових значень

$$\mathbf{s}(0) = \begin{pmatrix} s(0) \\ s'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_m \cos \varphi \\ -\omega S_m \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

1.4. Матричний спосіб розв'язання рівняння стану

1.4.1. Метод перехідної матриці

За аналогією з узагальненою формулою розрахунку перехідних процесів в колах першого порядку запишемо розв'язок матричного рівняння стану (1.12) у векторній формі

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{BL}(t) + \mathbf{x}_{BM}(t) = \mathbf{F}(t)[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{BM}(0)] + \mathbf{x}_{BM}(t), \quad (1.15)$$

де матриця n -го порядку часових функцій $\mathbf{F}(t)$, яка називається **перехідною матрицею** системи, є розв'язком матричного однорідного диференційного рівняння

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) = \mathbf{A}\mathbf{F}(t). \quad (1.16)$$

За аналогією зі скалярним випадком розв'язок матричного рівняння (1.16) може бути поданий **матричною експонентою**, тобто нескінченим рядом за степенями матриці \mathbf{A} :

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^i}{i!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2} + \dots = e^{\mathbf{A}t}, \quad (1.17)$$

де $\mathbf{I} = \mathbf{A}^0$ – одинична матриця. Зокрема, при $t=0$ $e^{\mathbf{A}t}|_{t=0} = \mathbf{I}$, що забезпечує рівність лівої та правої частин рівняння (1.15) в цей момент часу.

Для знаходження аналітичного виразу для матричної експоненти $e^{\mathbf{A}t}$ запишемо характеристичне рівняння матричного виразу (1.16):

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (1.18)$$

Приклад 1-9. Знайти вираз для лівої частини рівняння (1.18) для матриці \mathbf{A} другого порядку, тобто при $n=2$.

$$\begin{aligned}\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \left(p \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} p - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & p - a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (p - a_{11})(p - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) = \\ &= p^2 - pa_{22} - pa_{11} + a_{11}a_{22} - a_{11}a_{22} = p^2 - sp + \Delta = (p - p_1)(p - p_2),\end{aligned}$$

де $s = a_{11} + a_{22}$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{11}a_{22}$ – слід та визначник матриці \mathbf{A} ,

$p_{1,2} = s/2 \pm \sqrt{(s/2)^2 - \Delta}$ – корені характеристичного рівняння

$$p^2 - sp + \Delta = 0,$$

або **власні значення** матриці \mathbf{A} .

Якщо характеристичне рівняння (1.18) має n різних коренів $p_i; i = \overline{1, n}$, тобто

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

то довільна матрична функція обчислюється через зважену матричну суму таких самих функцій від власних значень матриці \mathbf{A} :

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i F(\lambda_i), \quad (1.19)$$

де \mathbf{P}_i - матричні проектори, що задовольняють умову

$$\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \begin{cases} \mathbf{P}_i, i = j; \\ \mathbf{0}, i \neq j. \end{cases}$$

1.4.2. Розрахунок матричної експоненти для системи другого порядку

Використовуючи формулу (1.19), знайдемо проектори матриці \mathbf{A} 2-го порядку при різних дійсних коренях характеристичного рівняння p_1, p_2 .

Формула (1.19) справедлива для будь-яких аналітичних функцій матриці \mathbf{A} . Застосуємо її для $F(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}_1 p_1^0 + \mathbf{P}_2 p_2^0 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2.$$

Отже, сума проекторів матриці другого порядку дорівнює одиничній матриці.

Аналогічно для $F(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1 p_1 + \mathbf{P}_2 p_2.$$

Розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими матрицями, отримаємо

$$\mathbf{P}_1 = \frac{(\mathbf{A} - p_2 \mathbf{I})}{p_1 - p_2}; \mathbf{P}_2 = \frac{(\mathbf{A} - p_1 \mathbf{I})}{p_2 - p_1}.$$

Таким чином, вираз для експоненційної функції від матриці \mathbf{A} другого порядку набуває вигляду:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}_1 e^{p_1 t} + \mathbf{P}_2 e^{p_2 t}. \quad (1.20)$$

Приклад 1-10. Знайти матричну експоненту для $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 2 & -12 \end{bmatrix}$.

Знаходимо характеристичне рівняння

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} p+3 & 10 \\ -2 & p+12 \end{vmatrix} = p^2 + 15p + 56 = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння $p_1 = -7; p_2 = -8$ є власними значеннями матриці \mathbf{A} . Знаходимо проектори матриці \mathbf{A} , що відповідають цим власним значенням.

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} (\mathbf{A} - p_2 \mathbf{I}) = \frac{1}{(-7) - (-8)} \begin{vmatrix} -3+8 & -10 \\ 2 & -12+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{p_2 - p_1} (\mathbf{A} - p_1 \mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Неважко переконатись, що

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}; \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2.$$

Матрична експонента має вигляд:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}_1 e^{p_1 t} + \mathbf{P}_2 e^{p_2 t} = \begin{vmatrix} 5e^{-7t} - 4e^{-8t} & -10e^{-7t} + 10e^{-8t} \\ 2e^{-7t} - 2e^{-8t} & -4e^{-7t} + 5e^{-8t} \end{vmatrix}.$$

У випадку комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння матриці 2-го порядку

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega,$$

де $\delta > 0; \omega > 0$, отримаємо такий вираз для матричної експоненти:

$$e^{At} = \frac{A - p_2 I}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{A - p_1 I}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} = e^{-\delta t} \left[\frac{A + (\delta + j\omega) I}{2j\omega} e^{j\omega t} - \frac{A(\delta - j\omega) I}{2j\omega} e^{-j\omega t} \right] =$$

$$= e^{-\delta t} \left[I \frac{j\omega(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2j\omega} + (A + \delta I) \frac{(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2j\omega} \right] = e^{-\delta t} \left[I \cos \omega t + (A + \delta I) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right]. \quad (1.21)$$

Приклад 1-11. Знайти e^{At} для матриці $A = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Формуємо характеристичне рівняння

$$\det(pI - A) = \begin{vmatrix} p+5 & -5 \\ 4 & p-3 \end{vmatrix} = (p+5)(p-3) + 20 = p^2 + 2p + 5 = 0.$$

Власні значення матриці A

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2j$$

є комплексно-спряженими зі значеннями параметрів $\delta = 1, \omega = 2$.

За формулою (1.21)

$$e^{At} = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} -5+1 & 5 \\ -4 & 3+1 \end{bmatrix} \frac{\sin 2t}{2} \right) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos 2t - 2 \sin 2t & -2.5 \sin 2t \\ -2 \sin 2t & \cos 2t + 2 \sin 2t \end{bmatrix}.$$

У граничному випадку при $p_1 = p_2 = -\delta, \delta > 0$ вираз для матричної експоненти отримаємо з виразу (1.21) граничним переходом при $\omega \rightarrow 0$:

$$e^{At} = e^{-\delta t} [I + (A + \delta I)t]. \quad (1.22)$$

За наявності в електричному колі хоча б одного резистора усі власні значення матриці A мають від'ємну дійсну частину, тому з плином часу матрична експонента прямує до нульової матриці:

$$\lim e^{At} \rightarrow \mathbf{0}_{n \times n}.$$

Тоді в колі відповідно до формули (1.15) при $\mathbf{F}(t) = e^{At} = \mathbf{0}$ настає усталений режим, що характеризується вимушеною складовою перехідного процесу:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{BM}(t).$$

1.4.3. Розв'язання рівняння стану для кіл постійного струму другого порядку

Для кола постійного струму вимушена складова перехідного процесу в формулі (1.15) є вектором, координати якого не залежать від часу:

$$\mathbf{x}_{BM}(0) = \mathbf{x}_{BM}(t) = \mathbf{x}(\infty),$$

оскільки з часом елементи вільної складової перехідного процесу наближаються до нуля. Тому розв'язок рівняння стану для кіл постійного струму другого порядку має наступну форму

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{BL}(t) + \mathbf{x}_{BM}(t) = e^{At} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] + \mathbf{x}(\infty). \quad (1.23)$$

Значення кожної координати вектора $\mathbf{x}(\infty)$ можна знайти за методикою визначення усталених значень перехідного процесу в колі після комутації, або аналітично з рівняння стану (1.12) при $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}; \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}$:

$$\mathbf{x}(\infty) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}. \quad (1.24)$$

Приклад 1-11. Знайти усталене значення напруги конденсатора по закінченні перехідного процесу в схемі з прикладу 1-7.

За формулою (1.24) для другої координати вектора $\mathbf{x}(\infty)$

$$\begin{aligned} u_c(\infty) &= -\left\| \begin{array}{cc} -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{G_3}{C} \end{array} \right\|^{-1} \left\| \begin{array}{c} R_2 \\ (R_1 + R_2)L \\ 0 \end{array} \right\| E = -\frac{1}{\det \mathbf{A}} \left(-\frac{1}{C} \right) \frac{R_2 E}{(R_1 + R_2)L} = \\ &= \frac{LC}{\frac{R_1 R_2 G_3}{R_1 + R_2} + 1} \frac{R_2 E}{(R_1 + R_2)LC} = \frac{ER_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{E}{1 + R_1(G_2 + G_3)}. \end{aligned}$$

За методикою визначення усталених значень маємо аналогічне значення зазначеної змінної стану.

1.5. Схемотехнічний спосіб формування та розв'язання рівняння стану

1.5.1. Загальні положення схемотехнічного способу формування та розв'язання рівняння стану

Сутність схемотехнічного способу формування та розв'язання рівняння стану полягає у представленні вільної складової перехідного процесу у вигляді

$$\mathbf{x}_{в/л}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t), \quad (1.25)$$

де \mathbf{C} – матриця констант розмірності n , що знаходиться з аналізу кола до і після комутації; $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – n -вимірний вектор, утворений скалярними часовими функціями, що є множниками при проекторах матричної експоненти.

У найрозповсюдженішому випадку різних коренів характеристичного рівняння $e^{At} = P_1 e^{p_1 t} + P_2 e^{p_2 t} + \dots + P_n e^{p_n t}$ і вектор часових функцій визначається виразом:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{p_1 t} \\ e^{p_2 t} \\ \dots \\ e^{p_n t} \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння кола після комутації, що необхідне для визначення вектора $\varphi(t)$, може бути знайдене з лінійного однорідного рівняння стану, що отримують з системи (1.13) при $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$ та переносі матрично-векторного добутку в ліву частину рівності:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{i}_C \end{pmatrix} - \mathbf{A}' \begin{pmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Перетворивши перший вектор останнього виразу як

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{i}_C \end{pmatrix} = \mathbf{R} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{pmatrix},$$

та замінивши оператор диференціювання скалярною змінною p , матимемо характеристичне рівняння

$$\det(p\mathbf{R} - \mathbf{A}') = 0. \quad (1.26)$$

Перенесення матриці \mathbf{A}' в ліву частину рівняння (1.26) з протилежним знаком приводить до невід'ємності елементів її головної діагоналі, тобто вони набувають фізичного змісту опорів та провідностей відносно

затискачів реактивних елементів спрощеного кола після комутації. Крім того, елементи матриці \mathbf{A}' , симетричні відносно головної діагоналі, можуть бути визначені на основі принципу взаємності, тобто на основі аналізу схеми визначаються лише $n(n+1)/2$ параметрів рівняння (1.26).

Для знаходження елементів матриці \mathbf{C} з виразу (1.25) представимо вільну складову за формулою (1.15):

$$\mathbf{C} \begin{Bmatrix} e^{p_1 t} \\ e^{p_2 t} \\ \dots \\ e^{p_n t} \end{Bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{BM}(+0)]. \quad (1.27)$$

Зафіксувавши момент часу $t = 0$, з виразу (1.27) матимемо перше лінійне рівняння відносно елементів матриці \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_{BM}(+0) = \mathbf{d}_0.$$

Послідовно диференціюючи вираз (1.27), та фіксуючи початковий момент часу, матимемо інші $n-1$ рівнянь для визначення елементів матриці \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} \begin{Bmatrix} p_1^i \\ p_2^i \\ \dots \\ p_n^i \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^i [\mathbf{x}(+0) - \mathbf{x}_{BM}(+0)] = \mathbf{d}_i; i = 1, \dots, n-1.$$

Таким чином, матриця \mathbf{C} задовольняє рівняння

$$\mathbf{C}\mathbf{W} = \mathbf{D},$$

де $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 & \mathbf{d}_1 & \dots & \mathbf{d}_{n-1} \end{bmatrix}$; $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 & \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{w}_{n-1} \end{bmatrix}$ – матриця Вандермонда, кожен стовпчик якої складається зі степенів різних коренів характеристичного рівняння (1.26): $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} p_1^i & p_2^i & \dots & p_n^i \end{bmatrix}^T$; T – знак транспонування.

Будемо досліджувати перехідний процес однієї змінної стану $x(t) = \mathbf{j}^T \mathbf{x}(t)$. Тоді

$$x_{BL}(t) = \mathbf{c}^T \boldsymbol{\varphi}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t}; \mathbf{c}^T = \mathbf{j}^T \mathbf{C}.$$

Помноживши обидві частини рівняння для матриці \mathbf{C} на \mathbf{j}^T , отримаємо рівняння для визначення вектора-рядка \mathbf{c}^T :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{W} = \mathbf{j}^T \mathbf{D}.$$

Позначимо елементи вектора $\mathbf{j}^T \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta x' & \dots & \Delta x^{(n-1)} \end{bmatrix}$, тоді для визначення шуканих сталих інтегрування матимемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \\ \dots \\ \Delta x^{(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Особливе спрощення результатів відбувається при розрахунку окремих змінних стану кіл постійного струму 2-го порядку.

1.5.2. Аналіз перехідних режимів у колах 2-го порядку схемотехнічним способом

За наявності в колі різнорідних реактивних елементів L та C диференціальне рівняння для вільної складової має вигляд:

$$\mathbf{R} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_C \end{Bmatrix} - \mathbf{A}' \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \frac{di_L}{dt} \\ C \frac{du_C}{dt} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r & k \\ -k & g \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

де r – еквівалентний опір кола після комутації без джерел відносно затискачів котушки індуктивності при замкненому конденсаторі; g – еквівалентна провідність зазначеного кола відносно затискачів конденсатора при розімкненій котушці індуктивності;

$k = \left. \frac{i_C}{i_L} \right|_{u_C=0} = - \left. \frac{u_L}{u_C} \right|_{i_L=0}$ – коефіцієнт передачі струму від котушки індуктивності до перемички, встановленій на місці конденсатора зазначеного кола, який дорівнює з протилежним знаком коефіцієнту передачі напруги від конденсатора до розімкнених затискачів котушки індуктивності.

Характеристичне рівняння відповідно до формули (1.26)

$$\det(p\mathbf{R} - \mathbf{A}') = \begin{vmatrix} pL + r & k \\ -k & pC + g \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваючи визначник, отримаємо:

$$p^2 LC + (Lg + rC)p + k^2 + rg = 0.$$

Після ділення на LC матимемо остаточний вигляд характеристичного рівняння

$$p^2 + \left(\frac{r}{L} + \frac{g}{C} \right) p + \frac{k^2 + rg}{LC} = 0. \quad (1.29)$$

Приклад 1-12. Отримати параметри характеристичного рівняння r , g , k для заданого на рис. 1.17. кола другого порядку.

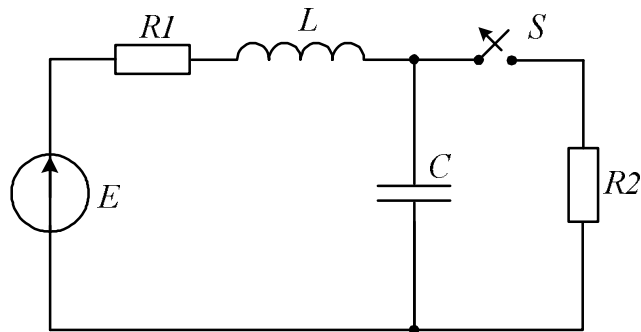


Рис. 1.17. Схема для дослідження перехідного процесу

Для знаходження коефіцієнтів характеристичного рівняння складемо відповідні еквівалентні схеми (рис. 1.18).

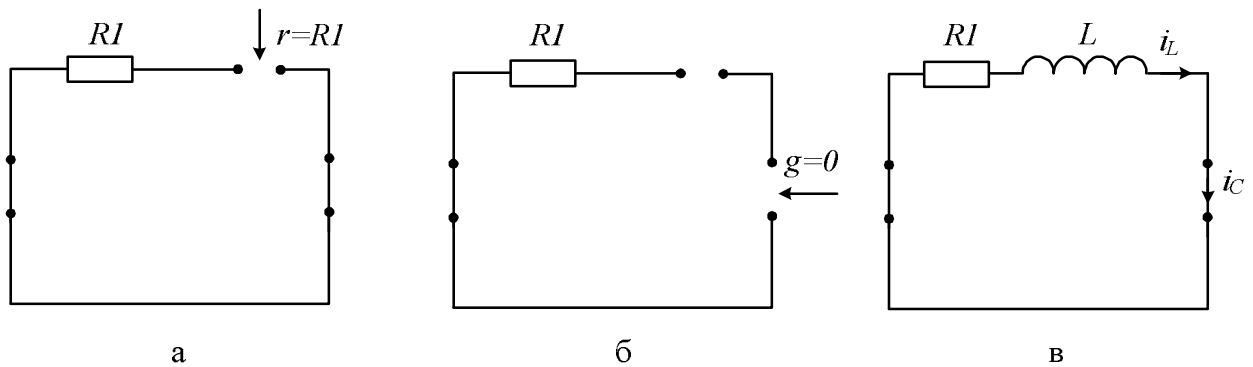


Рис. 1.18. Схеми для знаходження коефіцієнтів характеристичного рівняння схеми на рис. 1.17: а – еквівалентного опору r ; б – еквівалентної провідності g ; в – коефіцієнта передачі k

Аналізуючи ці схеми, послідовно знаходимо

$$r = R_1; g = 0; k = 1.$$

Отже, характеристичне рівняння заданого кола має вигляд:

$$p^2 + \frac{R_1}{L} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

В рівнянні (1.29) позначимо:

$$\frac{r}{L} + \frac{g}{C} = 2\delta; \frac{k^2 + rg}{LC} = \omega_0^2,$$

де δ – коефіцієнтом загасання; ω_0 – резонансна частота коливального контуру.

Тоді характеристичне рівняння (1.29) набуває вигляду

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

а його корені є такими:

$$p_{1,2} = \begin{cases} -\delta \pm \delta_\omega, \delta_\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \delta > \omega_0; \\ -\delta \pm j\omega, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \delta < \omega_0; \\ -\delta, \delta = \omega. \end{cases}$$

Відповідні режими зміни вільних складових перехідного процесу називають при $\delta > \omega_0$ – аперіодичним, при $\delta < \omega_0$ – коливальним та при $\delta = \omega_0$ – граничним.

Позначимо розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині (рис. 1.19).

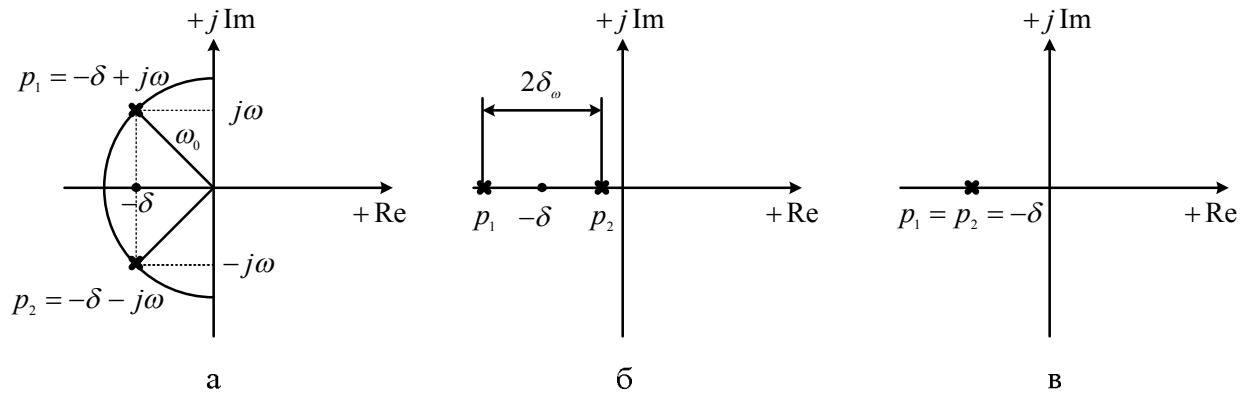


Рис. 1.19. Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині: а – в коливальному режимі, б – в аперіодичному режимі, в – в граничному режимі

Коливальний режим перехідного процесу відбувається за нерівності

$$\delta < \omega_0$$

і має місце лише в колі з різномірними реактивними елементами, тобто L та C . Підставивши значення параметрів, отримаємо наступну умову існування коливального режиму:

$$\frac{r}{L} + \frac{g}{C} - 2\sqrt{\frac{k^2 + rg}{LC}} < 0$$

Помноживши останню нерівність на \sqrt{LC} та згадавши, що $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

– хвильовий опір, отримаємо еквівалентну нерівність:

$$\frac{r}{\rho} + g\rho - 2\sqrt{k^2 + rg} < 0. \quad (1.30)$$

Розв'язок (1.30) за загальної умови $r \neq 0$; $g \neq 0$

$$\sqrt{k^2 + rg} - |k| < g\rho < \sqrt{k^2 + rg} + |k|;$$

за умови $r = 0$; $g \neq 0$, що має місце при паралельному з'єднанні елементів LC ($k = -1$),

$$\rho < 2 / g;$$

за умови $r \neq 0$; $g = 0$, що має місце при послідовному з'єднанні елементів LC ($k = 1$),

$$\rho > 0,5r.$$

В колі постійного струму 2-го порядку стовпчики матриці $\mathbf{D} = \|\mathbf{d}_0 \quad \mathbf{d}_1\|$ мають вигляд

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty); \mathbf{d}_1 = \mathbf{A}[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] = \mathbf{A}\mathbf{d}_0,$$

де координати векторів $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(\infty)$ знаходяться за методикою визначення усталених значень в колах до та після комутації.

Будемо досліджувати перехідний процес однієї змінної стану $x(t) = \mathbf{j}^T \mathbf{x}(t)$. Визначимо величини

$$\Delta x = \mathbf{j}^T \mathbf{d}_0 = x(0) - x(\infty); \Delta x' = \mathbf{j}^T \mathbf{d}_1 = \mathbf{j}_1^T \mathbf{d}_0;$$

$$\mathbf{j}_1^T = \mathbf{j}^T \mathbf{A} = \mathbf{j}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}' = \mathbf{j}^T \begin{Bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -r & -k \\ k & -g \end{Bmatrix} = \mathbf{j}^T \begin{Bmatrix} -r / L & -k / L \\ k / C & -g / C \end{Bmatrix}.$$

Вільна складова перехідного процесу в колі 2-го порядку в аперіодичному режимі записується таким чином:

$$x_{B/L}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}.$$

де c_1, c_2 – сталі інтегрування, що відповідно до формули (1.30) при $n = 2$ визначаються з лінійної системи рівнянь

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta x \\ \Delta x' \end{vmatrix}.$$

За правилом Крамера отримаємо:

$$c_1 = \frac{\Delta x' - \Delta x p_2}{p_1 - p_2}; c_2 = \frac{\Delta x p_1 - \Delta x'}{p_1 - p_2}.$$

В коливальному режимі кола другого порядку матрична експонента визначається виразом (1.21), тому вільна складова перехідного процесу однієї змінної стану описується виразом

$$x_{БЛ}(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t),$$

причому виконується рівність

$$\mathbf{j}^T e^{\mathbf{A}t} [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t). \quad (1.35)$$

Зафіксувавши в виразі (1.35) момент часу $t = 0$, матимемо перше рівняння для визначення сталих інтегрування:

$$\mathbf{j}^T [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] = \Delta x = c_1.$$

Продиференціювавши вираз (1.35), матимемо в початковий момент часу друге рівняння для визначення c_2 :

$$\mathbf{j}^T \mathbf{A}[\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] = \Delta x' = -\delta c_1 + \omega c_2,$$

звідки

$$c_2 = \frac{\Delta x' + \delta \Delta x}{\omega}.$$

Нарешті, в граничному режимі зміни вільної складової, де матрична експонента визначається виразом (1.22)

$$x_{БЛ}(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t),$$

сталі інтегрування можуть бути визначені з розгляду коливального режиму граничним переходом при $\omega \rightarrow 0$:

$$c_1 = \Delta x; c_2 = \Delta x' + \delta \Delta x.$$

Значення сталих інтегрування для різних режимів зміни вільної складової перехідного процесу зведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

<i>Режим</i>	<i>Вільна складова</i>	<i>Значення сталих</i>	
<i>апериодичний</i>	$x_{БЛ}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}$	$c_1 = \frac{\Delta x' - \Delta x p_2}{p_1 - p_2}$	$c_2 = \frac{\Delta x p_1 - \Delta x'}{p_1 - p_2}$
<i>коливальний</i>	$x_{БЛ}(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$	$c_1 = \Delta x$	$c_2 = \frac{\Delta x' + \delta \Delta x}{\omega}$
<i>граничний</i>	$x_{БЛ}(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t)$	$c_1 = \Delta x$	$c_2 = \Delta x' + \delta \Delta x$

Приклад 1-13. Дослідити перехідний процес зміни струму котушки індуктивності електричного кола на рис. 1.17 в усіх трьох режимах зміни вільної складової.

Для визначення вектора початкових умов розглянемо еквівалентну схему кола до комутації (рис.1.22, а):

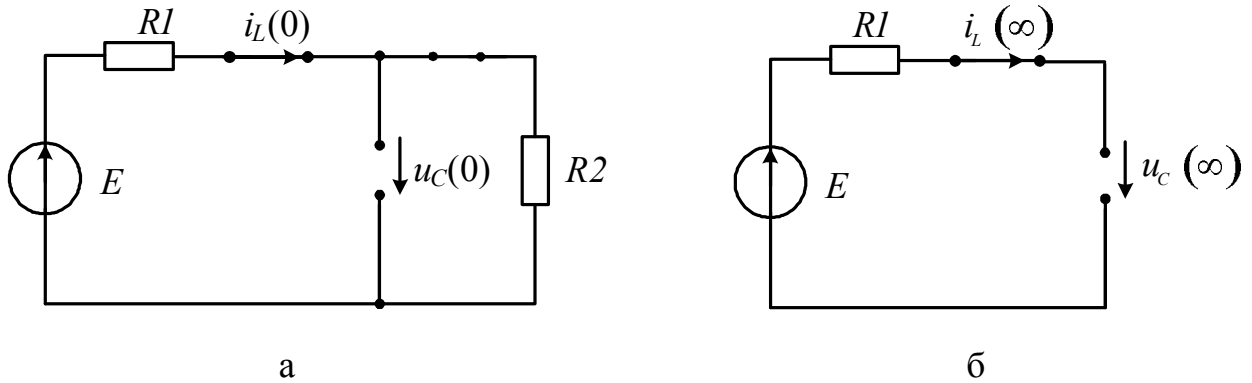


Рис.1.22. Еквівалентні схеми для визначення усталених значень: а – до комутації; б – після комутації

З аналізу цього кола

$$i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}; u_C(0) = i_L(0)R_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

Для знаходження вимушених значень змінних стану розглянемо еквівалентну схему кола після комутації (рис.1.22, б). З аналізу цього кола

$$i_L(\infty) = 0; u_C(\infty) = E.$$

Формуємо вектор

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty) = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1 + R_2} \\ \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \\ \frac{E}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1 + R_2} \\ -\frac{ER_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} = \frac{E}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 \\ -R_1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки шукана змінна $i_L(t)$ є першою координатою вектора змінних стану,

$$\mathbf{j}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{j}_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r/L & -k/L \\ k/C & -g/C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r/L & -k/L \end{bmatrix} = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} r & k \end{bmatrix} = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} R_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо

$$\Delta x = \mathbf{j}^T \mathbf{d}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ R_1 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -R_1 \end{bmatrix} = \frac{E}{R_1 + R_2}; \Delta x' = \mathbf{j}_1^T \mathbf{d}_0 = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} R_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ R_1 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -R_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Аперіодичний режим змiну вiльної складової спостерiгається за умови

$$\sqrt{L/C} < 0,5R_1.$$

Сталі інтегрування c_1, c_2 знаходимо за відповідними виразами з табл.

1.1:

$$c_1 = \frac{\Delta x' - \Delta x p_2}{p_1 - p_2} = -\frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p_2}{p_1 - p_2}; c_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p_1}{p_1 - p_2}.$$

Підставляємо отримані значення у вираз для перехідного процесу:

$$i_L(t) = i_{L_{BL}}(t) + i_{L_{BM}}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + i_L(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}.$$

Будуємо графік перехідного процесу (рис. 1.23, а) для нормованої величини

$$i_{LN}(t) = \frac{(R_1 + R_2)i_L(t)}{E} = \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}.$$

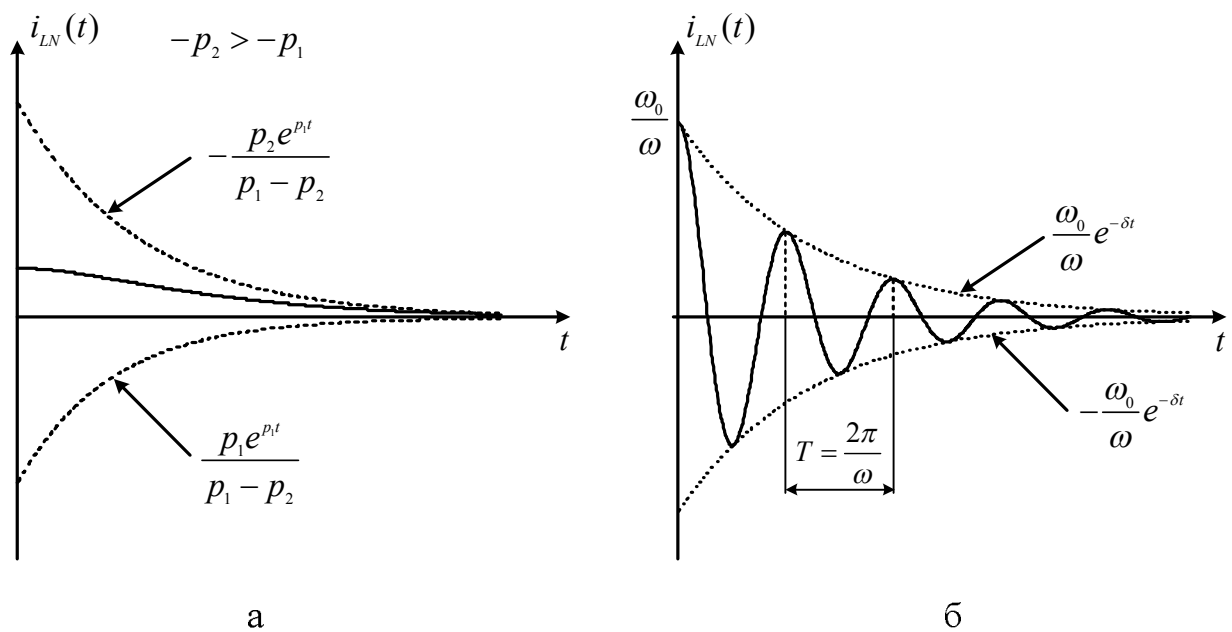


Рис.1.23. Графіки перехідного процесу нормованого струму котушки індуктивності кола на рис. 1.22: а – аперіодичний режим; б – коливальний режим.

Коливальний режим в колі 2-го порядку на рис. 1.22 настає за умови

$$\sqrt{L/C} > 0,5R_1,$$

при цьому вільна складова перехідного процесу має вигляд

$$x_{BL}(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

За формулами табл. 1.1 визначаємо сталі інтегрування для коливального режиму:

$$c_1 = \Delta x = \frac{E}{R_1 + R_2}; c_2 = \frac{\Delta x' + \delta \Delta x}{\omega} = \frac{E \delta}{(R_1 + R_2) \omega}.$$

Перехідний струм котушки у коливальному режимі

$$i_L(t) = i_{L_{BL}}(t) + i_{L_{BM}}(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + i_L(\infty) = \\ = \frac{E e^{-\delta t}}{R_1 + R_2} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) = \frac{E e^{-\delta t}}{R_1 + R_2} \frac{\omega_0}{\omega} \cos(\omega t - \arctg \frac{\delta}{\omega}).$$

Графік перехідного процесу для нормованого струму

$$i_{LN}(t) = \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos(\omega t - \arctg \frac{\delta}{\omega})$$

наведений на рис. 1.23, б. Швидкість загасання вільних синусоїдальних коливань характеризується коефіцієнтом загасання δ , оскільки амплітуда коливань в часі зменшується в результаті множення на $e^{-\delta t}$. **Період власних коливань** визначається виразом $T = 2\pi / \omega$. **Логарифмічним декрементом загасання** θ називають відношення миттєвих значень перехідного процесу, що відстоять на період. Обравши початковий момент часу $t_1 = \omega^{-1} \arctg(\delta / \omega)$, матимемо

$$\theta = \ln \frac{i_L(t_1)}{i_L(t_1 + T)} = \ln \frac{\frac{E}{R_1 + R_2} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t_1}}{\frac{E}{R_1 + R_2} \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta(t_1 + T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T.$$

Граничний режим зміни вільної складової має місце за умови $\sqrt{L/C} = 0,5R_1$. В цьому випадку

$$i_L(t) = i_{L_{BL}}(t) + i_{L_{BM}}(t) = e^{-\delta t} (c_1 + c_2 t) = \frac{E e^{-\delta t}}{R_1 + R_2} (1 + \delta t).$$

Графік перехідного процесу в граничному режимі дуже схожий на графік перехідного процесу в аперіодичному режимі (рис. 1.23, а).

1.6. Отримання зображень досліджуваних величин в операторному методі розрахунку перехідних процесів

1.6.1. Перетворення Лапласа та його властивості

Нехай часова функція $f(t)$, що називається оригінал, має такі властивості:

- задовольняє умову Діріхле;
- приймає нульові значення для від’ємного часу:

$$f(t) = 0, t < 0;$$

– є функцією обмеженого зростання:

$$f(t) \leq \mu e^{\sigma t},$$

де μ, σ - деякі додатні константи.

Тоді їй можна поставити у відповідність зображення $F(p)$ – функцію комплексної змінної p , що позначають $f(t) \div F(p)$, застосувавши пряме перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.36)$$

Приклад 1-15. Знайти зображення для часової функції – оригіналу

$$f(t) = Ae^{at} E(t),$$

де A, a – константи, $E(t)$ – функція одиничного стрибка.

Відповідно до формули (1.36) прямого перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} A e^{at} dt = \frac{A}{p-a} \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} d[(p-a)t] = \frac{A}{p-a}.$$

Першою основною властивістю перетворення Лапласа є лінійність:
якщо

$$f_1(t) \div F_1(p); f_2(t) \div F_2(p),$$

то для будь-яких констант a_1, a_2

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \div a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p).$$

Звідси випливає, що для зображень струмів та напруг справедливі закони Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа – алгебраїчна сума зображень струмів, що сходяться в будь-якому вузлі, дорівнює 0:

$$\sum_i I_i(p) = 0.$$

Другий закон Кірхгофа – в будь-якому контурі алгебраїчна сума зображень ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі зображень падінь напруг:

$$\sum_e E_e(p) = \sum_u U_u(p).$$

Другою основною властивістю перетворення Лапласа є алгебраїзація операцій диференціювання та інтегрування:

Якщо

$$f(t) \div F(p),$$

то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Застосовуємо зазначену властивість диференціювання оригіналу до котушки індуктивності з зображенням струму $i_L(t) \div I_L(p)$ та відповідним компонентним рівнянням:

$$L \frac{di_L}{dt} = u_L \div U_L(p) = L[pI_L(p) - i_L(0)] = (pL)I_L(p) - Li_L(0). \quad (1.37)$$

Комплексну величину $pL = Z_L(p)$ називають **операторним опором** котушки індуктивності.

Обернену величину $Y_L(p) = \frac{1}{Z_L(p)} = \frac{1}{pL}$ називають **операторною провідністю** котушки індуктивності. Величину $Li_L(0)$ називають **залежним джерелом напруги**, оскільки його значення залежить від початкової умови струму котушки. Подамо операторний схемний еквівалент котушки індуктивності для застосування в методі контурних струмів (табл. 1.2) як послідовне з'єднання операторного опору та залежного джерела ЕРС.

Розв'язавши рівняння (1.37) відносно зображення струму

$$I_L(p) = \frac{1}{pL} U_L(p) + \frac{i_L(0)}{p} = Y_L(p) U_L(p) + \frac{i_L(0)}{p}, \quad (1.38)$$

матимемо схемний еквівалент котушки індуктивності для застосування в методі вузлових напруг (табл. 1.2).

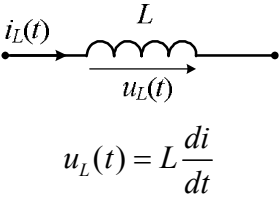
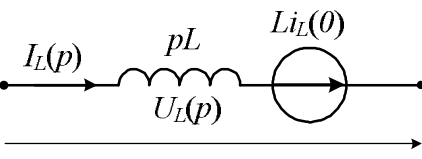
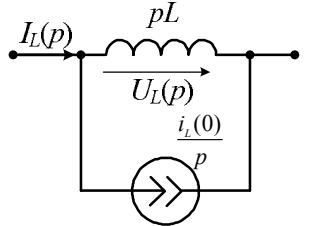
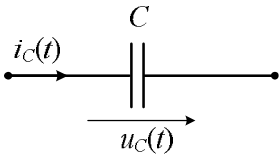
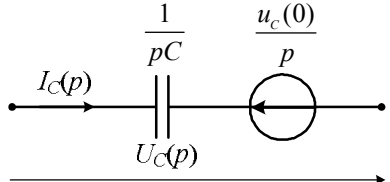
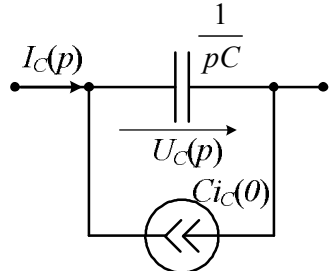
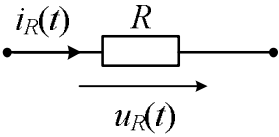
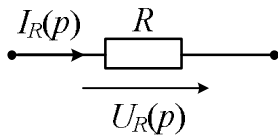
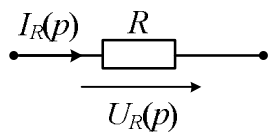
Аналогічно, розглядаючи конденсатор з компонентним рівнянням

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \text{ матимемо в області зображень}$$

$$I_C(p) = C[pU_C(p) - u_C(0)] = Y_C(p)U_C(p) - Cu_C(0), \quad (1.39)$$

де $Y_C(p) = pC$ – **операторна провідність** конденсатора, $Cu_C(0)$ – параметр залежного джерела струму. Відповідний схемний еквівалент конденсатора для застосування в методі вузлових напруг занесений в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Схемний елемент в часовій області	Операторний еквівалент для методу контурних струмів	Операторний еквівалент для методу вузлових напруг
 $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$	 $U_L(p) = I_L(p)pL - Li_L(0)$	 $I_L(p) = \frac{1}{pL} U_L(p) + \frac{i_L(0)}{p}$
 $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$	 $U_C(p) = I_C(p) \frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}$	 $I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0)$
 $u_R(t) = Ri_R(t)$ $i_R(t) = Gu_R(t)$	 $U_R(p) = RI_R(p)$	 $I_R(p) = GU_R(p)$

Розв'язавши рівняння (1.39) відносно зображення напруги конденсатора,

$$U_c(p) = \frac{1}{pC} I_c(p) + \frac{u_c(0)}{p}, \quad (1.40)$$

матимемо операторний схемний еквівалент конденсатора для застосування в методі контурних струмів (табл.1.2). Комплексна величина $Z_c(p) = \frac{1}{pC}$

називається **операторним опором** конденсатора, величина $\frac{u_c(0)}{p}$ – параметр залежного джерела напруги.

Відзначимо, що в операторній схемі заміщення котушки індуктивності стрілочка залежного джерела напруги спрямована за напрямом струму котушки, а в операторній схемі заміщення конденсатора – проти напрямку струму конденсатора.

Операторна схема заміщення для резистора є операторним опором, що дорівнює його номіналу, $Z_R(p) = R$ для методу контурних струмів, та операторною провідністю $Y_R(p) = 1/R$ в методі вузлових напруг, що впливає з закону Ома в комплексній області:

$$U_R(p) = R I_R(p). \quad (1.41)$$

1.6.2. Знаходження зображень змінних, що досліджуються в перехідному процесі

Для дослідження перехідного процесу в електричному колі після комутації складають операторну схему заміщення, що утворюється шляхом заміни кожного з елементів електричного кола після комутації його операторним еквівалентом. Зображення змінної, що досліджується в перехідному процесі, знаходять шляхом застосування до операторної схеми заміщення будь-якого методу аналізу кіл постійного струму для

специфічних (операторних) опорів та провідностей з урахуванням зображень усіх (залежних і незалежних) джерел.

Приклад 1-16. Знайти операторне зображення струму котушки індуктивності кола на рис. 1.17.

Складаємо операторну схему заміщення кола після комутації (рис. 1.24), скориставшись операторними схемними еквівалентами елементів, застосовуваними в методі контурних струмів (табл. 1.2).

Відновлюємо значення параметрів незалежних джерел:

$$i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_2}; u_C(0) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

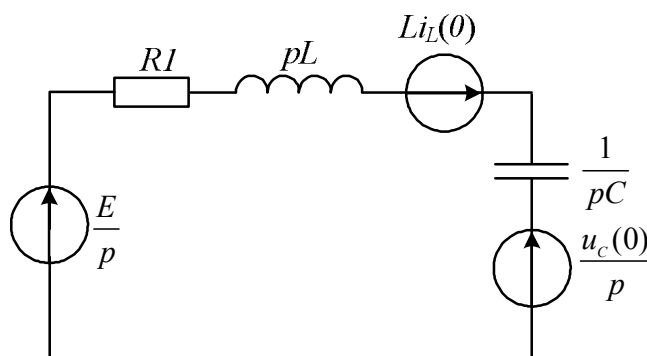


Рис.1.24.Еквівалентна операторна схема заміщення для визначення зображення струму котушки

Застосувавши другий закон Кірхгофа в операторній формі для єдиного контуру схеми на рис. 1.24, матимемо вираз для зображення контурного струму, що дорівнює струму котушки:

$$I_L(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R_1 + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{\left[\frac{1}{p} \left(E - \frac{ER_2}{R_1 + R_2} \right) + Li_L(0) \right] p}{p \left(pL + R_1 + \frac{1}{pC} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{ER_1}{R_1 + R_2} + pL \frac{E}{R_1 + R_2}}{p^2 L + pR_1 + \frac{1}{C}} = \frac{E}{R_1 + R_2} \times \frac{p + \frac{R_1}{L}}{p^2 + p \frac{R_1}{L} + \frac{1}{LC}}.$$

Таким чином, зображення шуканої величини є відношенням двох поліномів відносно комплексної змінної p .

1.7. Способи переходу від зображення до оригіналу

1.7.1. Теорема розкладання

Нехай зображення шуканої величини має вигляд поліноміального дробу:

$$X(p) = \frac{a_m p^m + \dots + a_1 p + a_0}{p_n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{A(p)}{B(p)}; m < n,$$

причому усі n коренів характеристичного рівняння $B(p) = 0$ є дійсними різними числами, тоді знаменник зображення можна розкласти за коренями у вигляді добутку:

$$B(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

де p_i – прості дійсні корені характеристичного рівняння.

Відомо, що поліноміальний дріб можна розкласти на суму

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - p_i}, \quad (1.42)$$

$$\text{де } c_i = \frac{A(p_i)}{B'(p_i)}; B'(p) = \frac{dB(p)}{dp}.$$

Приклад 1-17. Розкласти на елементарні дробі поліноміальний дріб

$$\frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}.$$

Аналізуючи знаменник вказаного дробу, знаходимо

$$B(p) = p^3 + 6p^2 + 11p + 6 = (p + 1)(p + 2)(p + 3).$$

Отже, коренями характеристичного рівняння є три різних простих числа

$$p_1 = -1; p_2 = -2; p_3 = -3.$$

Диференціюючи знаменник за змінною p , знаходимо

$$B'(p) = 3p^2 + 12p + 11.$$

З опису коефіцієнтів формули (1.42)

$$c_1 = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} = \frac{(-1)^2 + 2(-1) + 3}{3(-1)^2 + 12(-1) + 11} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$c_2 = \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} = \frac{3}{-1} = -3; c_3 = \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} = 3.$$

Таким чином,

$$\frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{p - p_i} = \frac{1}{p+1} - \frac{3}{p+2} + \frac{3}{p+3}.$$

Приведенням до спільного знаменника правої частини отриманої формули нескладно отримати її ліву частину та впевнитися в тотожності виразу (1.42).

Оскільки часовому оригіналу $Ae^{at}E(t)$ відповідає зображення $\frac{A}{p-a}$, то кожному доданку $\frac{c_i}{p-p_i}$ зображення $\frac{A(p)}{B(p)}$ відповідає доданок оригіналу $c_i e^{p_i t} E(t)$, і справедлива теорема розкладання

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - p_i} \div E(t) \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}. \quad (1.43)$$

Зокрема, для прикладу 1-17

$$\frac{p^2 + 2p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = \frac{1}{p+1} - \frac{3}{p+2} + \frac{3}{p+3} \div (e^{-t} - 3e^{-2t} + 3e^{-3t})E(t).$$

1.7.2. Застосування теореми розкладання для випадку $n = 2$

Спочатку вважатимемо корені знаменника зображення дійсними різними

$$B(p) = p^2 + b_1 p + b_0 = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = (p - p_1)(p - p_2),$$

$$\text{де } p_{1,2} = -\delta \pm \delta_\omega; \delta_\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

В найпростішому випадку чисельника $A(p)=1$, тобто

$$X(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2}.$$

Послідовно знаходимо

$$B'(p) = 2p + 2\delta = 2p - p_1 - p_2;$$

$$c_1 = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} = \frac{1}{p_1 - p_2}; c_2 = \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} = \frac{1}{p_2 - p_1}.$$

За формулою (1.43)

$$x(t) = (c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}) E(t) = \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} + \frac{e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} \right) E(t) = \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} E(t).$$

Таким чином,

$$\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} \div \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} E(t). \quad (1.44)$$

Розглянемо складніший випадок чисельника, коли $A(p) = p + a_0$:

$$X(p) = \frac{p + a_0}{p^2 + bp + b_0} = \frac{p + a_0}{(p-p_1)(p-p_2)}.$$

Тоді

$$c_1 = \frac{A(p_1)}{B(p_1)} = \frac{p_1 + a_0}{p_1 - p_2};$$

$$c_2 = \frac{A(p_2)}{B(p_2)} = \frac{p_2 + a_0}{p_2 - p_1};$$

$$x(t) = (c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}) E(t) = \left(\frac{p_1 + a_0}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 + a_0}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right) E(t).$$

І остаточно

$$\frac{p + a_0}{(p - p_1)(p - p_2)} \div \left(\frac{p_1 + a_0}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 + a_0}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right) E(t). \quad (1.45)$$

Формули теореми розкладання для випадків комплексно-спряжених та однакових коренів знаменника зображення можуть бути отримані з виразів (1.44), (1.45) підстановкою відповідних значень коренів в готові формули оригіналів та подальших їх перетворень.

Приклад 1-18. Знайти оригінал зображення з прикладу 1.16 для всіх випадків локалізації коренів знаменника зображення.

Для випадку дійсних коренів $p_{1,2} = -\delta \pm \delta_\omega$

$$I_L(p) = \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p + \frac{R_1}{L}}{p^2 + \frac{R_1}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p + 2\delta}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p + 2\delta}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

З формули (1.45) при $a_0 = 2\delta$

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{E}{R_1 + R_2} \left(\frac{p_1 + 2\delta}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 + 2\delta}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right) E(t) = \\
&= \frac{E}{R_1 + R_2} \left(\frac{-p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{-p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \right) E(t) = \\
&= \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} E(t).
\end{aligned}$$

Для випадку комплексно спряжених коренів після підстановки $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$ в попередній вираз отримаємо

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{E}{R_1 + R_2} \frac{(-\delta + j\omega)e^{(-\delta - j\omega)t} - (-\delta - j\omega)e^{(-\delta + j\omega)t}}{2j\omega} E(t) = \\
&= \frac{Ee^{-\delta t}}{R_1 + R_2} \left[\frac{j\omega(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})}{2j\omega} + \frac{\delta(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2j\omega} \right] E(t) = \\
&= \frac{Ee^{-\delta t}}{R_1 + R_2} (\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t) E(t).
\end{aligned}$$

Нарешті, в граничному режимі за однакових коренів $p_{1,2} = -\delta$ з попереднього виразу отримаємо граничним переходом при $\omega \rightarrow 0$:

$$i_L(t) = \frac{Ee^{-\delta t}}{R_1 + R_2} (1 + \delta t) E(t).$$

1.7.3. Формула розкладання за наявності простого нульового кореня

В колі постійного струму, де зображення джерела постійної ЕРС $E(p) = \frac{E}{p}$, зображення шуканої величини може містити простий нульовий корінь

$$X(p) = \frac{A(p)}{pV(p)}.$$

Тоді знаменник та його похідна можуть бути представлені таким чином:

$$B(p) = V(p)p = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_{n-1})p;$$

$$V(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_{n-1});$$

$$B'(p) = V(p) + p \frac{dV(p)}{dp};$$

$$B'(0) = V(0); c_n = \frac{A(0)}{V(0)} = \frac{A(0)}{B'(0)}.$$

Теорема розкладання для даного випадку набуває вигляду:

$$X(p) = \frac{A(p)}{V(p)p} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{p - p_i} + \frac{A(0)}{pV(0)} \div \left[\sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{p_i t} + \frac{A(0)}{V(0)} \right] E(t). \quad (1.46)$$

Приклад 1-19. Знайти оригінал зображення

$$X(p) = \frac{p + a_0}{p^3 + bp^2 + b_0p} = \frac{p + a_0}{(p - p_1)(p - p_2)p}.$$

Для даного випадку

$$n = 3; A(p) = p + a_0;$$

$$V(p) = (p - p_1)(p - p_2) = p^2 + b_1p + b_0.$$

За формулою (1.46)

$$x(t) = \left[\sum_{i=1}^2 c_i e^{p_i t} + \frac{A(0)}{V(0)} \right] E(t) = \left(\frac{p_1 + a_0}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_2 + a_0}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} + \frac{a_0}{b_0} \right) E(t).$$

Основні зображення та відповідні їм оригінали зведено в табл. 1.3 (в оригіналах опущені множники у вигляді функцій одиничного стрибка).

Таблиця 1.3

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a - b}$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	13	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	14	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
4	$e^{\mp \alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$	15	$\sin(\beta t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \beta \cos \psi}{p^2 + \beta^2}$
5	$-ae^{-at}$	$\frac{p}{p+a}$	16	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$
6	$e^{\mp j\omega t}$	$\frac{1}{p \pm j\omega}$	17	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$
7	$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$	18	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
8	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	19	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
9	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$	20	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \times$ $\times \left(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a} \right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
10	$a(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$	21	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^3}$
11	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	22	$t \left(1 - \frac{a}{2} t \right) e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^3}$

1.7.4. Алгоритм розрахунку перехідного процесу операторним методом

Алгоритм розрахунку перехідного процесу операторним методом полягає в наступному.

1. Визначаємо початкові умови $i_L(0), u_C(0)$.
2. Складаємо операторну схему заміщення, враховуючи початкові умови в залежних джерелах, а елементи кола представивши операторними зображеннями джерел напруги чи струму та операторними опорами чи провідностями в залежності від застосовуваного методу розрахунку.
3. Найзручнішим з відомих методів розрахунку електричного кола знаходимо зображення шуканої величини.
4. Прирівнявши до нуля знаменник зображення, знаходимо корені характеристичного рівняння та розкладаємо знаменник зображення по коренях.
5. З таблиці відповідності зображень та оригіналів 1.3 вибираємо оригінал, що відповідає даному зображенню.

1.7.5. Знаходження характеристичного рівняння для вільної складової перехідного процесу операторним методом

В загальному випадку знаменник зображення шуканої величини містить корені, що відповідають як вільній, так і вимушеній складовим перехідного процесу. Для знаходження характеристичного рівняння саме вільної складової перехідного процесу потрібно прирівняти до нуля еквівалентний операторний опір кола після комутації відносно затискачів ключа при його замиканні або прирівняти до нуля еквівалентну операторну провідність кола після комутації відносно затискачів ключа при його розмиканні. В обох випадках видаляються джерела: ідеальне джерело напруги шляхом закоротки, ідеальне джерело струму шляхом розриву ланцюга.

Приклад 1-20. Знайти характеристичне рівняння для вільної складової кола після комутації з прикладу 1-7 операторним методом.

Електричне коло після комутації для визначення операторного опору відносно затисків ключа при видаленому джерелі напруги наведене на рис. 1.25.

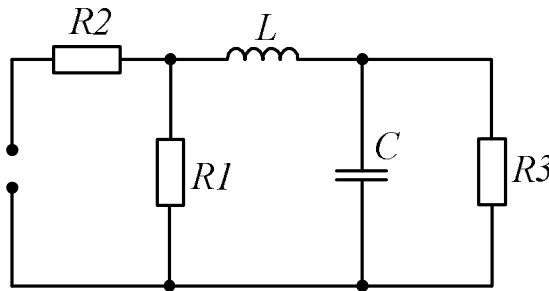


Рис.1.25. Еквівалентна операторна схема для визначення характеристичного рівняння вільної складової перехідного процесу

Операторний опір кола знайдемо почерговим застосуванням формул для еквівалентного перетворення операторних опорів та провідностей ділянок кола з послідовним та паралельним з'єднанням елементів:

$$\begin{aligned}
 Z(p) &= R_2 + \frac{1}{G_1 + \frac{1}{pL + \frac{1}{pC + G_3}}} = R_2 + \frac{1}{G_1 + \frac{pC + G_3}{p^2LC + pLG_3 + 1}} = \\
 &= R_2 + \frac{p^2LC + pLG_3 + 1}{p^2LCG_1 + p(LG_1G_3 + C) + G_1 + G_3} = \\
 &= \frac{p^2LC(1 + R_2G_1) + p[LG_3(1 + R_2G_1) + CR_2] + 1 + R_2(G_1 + G_3)}{p^2LCG_1 + p(LG_1G_3 + C) + G_1 + G_3},
 \end{aligned}$$

де $G_1=1/R_1$; $G_3=1/R_3$.

Прирівнявши до нуля чисельник операторного опору, отримаємо

$$p^2 LC(1 + R_2 G_1) + p[LG_3(1 + R_2 G_1) + CR_2] + 1 + R_2(G_1 + G_3) = 0.$$

Розділивши цей вираз на коефіцієнт $LC(1 + R_2 G_1)$, остаточно отримуємо результат для характеристичного рівняння:

$$p^2 + p \left[\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} + \frac{G_3}{C} \right] + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R_1 R_2 G_3}{R_1 + R_2} \right) = 0.$$

1.8. Операторні схемні функції в базисі вузлових напруг

1.8.1. Операторний коефіцієнт передачі за напругою чотириполюсника

Нехай для заданого пасивного кола (рис.1.26, а) потрібно знайти операторний коефіцієнт передачі за напругою від входних (a, b) до вихідних (c, d) затискачів.

Складемо систему рівнянь електричної рівноваги в базисі вузлових напруг, зв'язавши операторні потенціали незалежних вузлів $\varphi_j(p); j = \overline{1, n}$ з операторними провідностями у вигляді матриці $\mathbf{Y} = \|Y_{ij}(p)\|; i, j = \overline{1, n}$ та єдиним джерелом струму $J(p)$, підключеним до входних затискачів a, b (у подальшому залежність величин від p опускатимемо):

$$\mathbf{Y} \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \dots \\ \varphi_c \\ \varphi_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J \\ -J \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

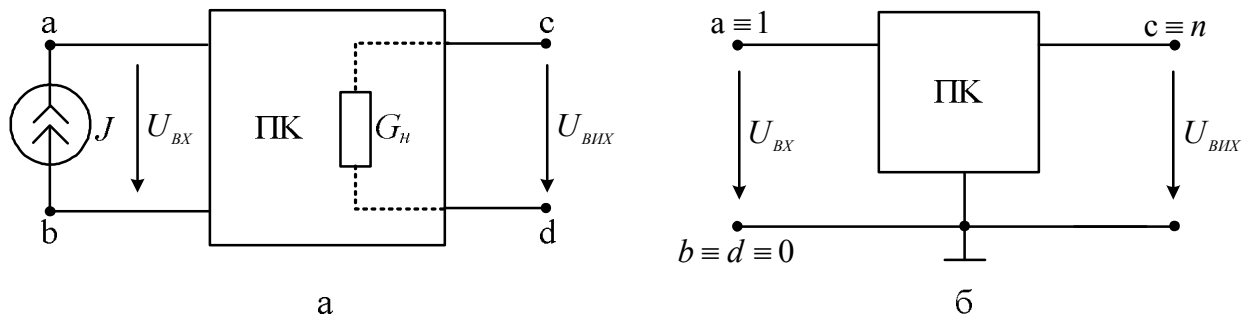


Рис.1.26. Схема пасивного електричного кола з вхідними та вихідними затисками: а – з чотирма зовнішніми затисками; б – з трьома зовнішніми затисками

Із заданої системи знайдемо потенціал j -го вузла:

$$\varphi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{\Delta_{aj}J - \Delta_{bj}J}{\Delta} = \frac{\Delta_{aj} - \Delta_{bj}}{\Delta} J,$$

де Δ_{ij} – алгебраїчне доповнення, $\Delta = \det \mathbf{Y}$ – визначник матриці \mathbf{Y} .

Знайдемо аналітичний вираз для **операторного коефіцієнта передачі за напругою**

$$K_U(p) = \frac{U_{BHX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{bc} - \Delta_{ad} + \Delta_{bd}}{\Delta_{aa} - \Delta_{ba} - \Delta_{ba} + \Delta_{bb}} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}. \quad (1.47)$$

де $\Delta_{(a+b)(c+d)}$ – **сумарне алгебраїчне доповнення**, що обчислюється за таким правилом:

- в матриці \mathbf{Y} рядок a треба додати до рядка b і далі рядок a викреслити;
- стовпчик c треба додати до стовпчика d , а потім стовпчик c викреслити;
- знайти визначник підматриці, що утворилася;
- помножити визначник на $(-1)^{a+c}$.

Приклад 1-21. Знайти сумарне алгебраїчне доповнення $\Delta_{(1+3)(3+2)}$ матриці

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Виконуємо наступну послідовність дій:

$$\xrightarrow{\textcircled{1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}} \begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 \\ 8 & 13 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}} 4 \cdot 13 - 8 \cdot 11 = -36 \xrightarrow{\textcircled{4}} \Delta_{(1+3)(3+2)} = (-1)^{1+3} (-36) = -36$$

Приклад 1-22. Знайти умову рівноваги ($U_{BHX} = 0$) мостової схеми (рис.1.27).

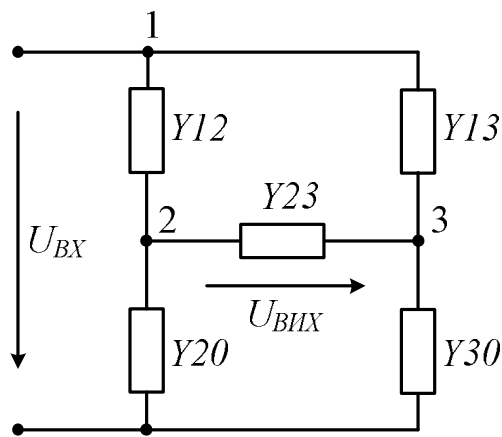


Рис.1.27. Мостова схема

Складемо матрицю операторних провідностей

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{12}+Y_{13} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ -Y_{12} & Y_{12}+Y_{23}+Y_{20} & -Y_{23} \\ -Y_{13} & -Y_{23} & Y_{13}+Y_{23}+Y_{30} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

За формулою (1.47)

$$K_U = \frac{\Delta_{(1+0)(2+3)}}{\Delta_{(1+0)(1+0)}} = \frac{\Delta_{1(2+3)}}{\Delta_{11}}.$$

Для виконання умови рівноваги

$$\Delta_{1(2+3)} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -Y_{12} & Y_{12}+Y_{20} \\ -Y_{13} & Y_{13}+Y_{30} \end{vmatrix} = Y_{12}Y_{30} - Y_{13}Y_{20} = \frac{1}{Z_{12}Z_{30}} - \frac{1}{Z_{13}Z_{20}} = 0.$$

Таким чином, умова рівноваги мостової схеми

$$Z_{12}Z_{30} = Z_{13}Z_{20}.$$

1.8.2. Операторний коефіцієнт передачі за напругою кола з трьома зовнішніми затискачами

Якщо вхідна та вихідна напруга кола визначаються відносно спільного затискача (рис.1.26,б), доцільно прийняти його потенціал рівним нулю (заземлити), інший вхідний вузол вважати першим, інший вихідний вузол – останнім:

$$b \equiv d \equiv 0; a \equiv 1; c \equiv n.$$

Тоді формула (1.47) набуває вигляду зі звичайними алгебраїчними доповненнями:

$$K_U = \frac{\Delta_{(1+0)(n+0)}}{\Delta_{(1+0)(1+0)}} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_{11}}. \quad (1.48)$$

Приклад 1-23. Знайти операторний коефіцієнт передачі за напругою Г-подібного кола (рис.1.28).

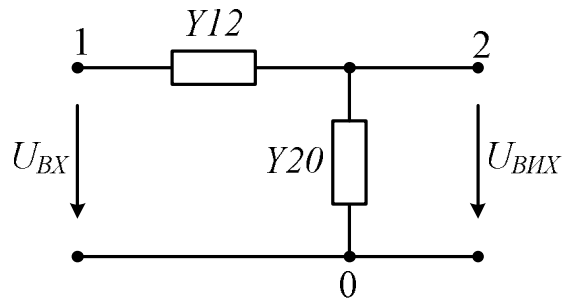


Рис.1.28. Схема Г- подібного кола

Складемо матрицю операторних провідностей

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{12} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{12} + Y_{20} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Знаходимо коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2} (-Y_{12})}{Y_{12} + Y_{20}} = \frac{1}{1 + Z_{12} Y_{20}}.$$

Приклад 1-24. Знайти операторний коефіцієнт передачі за напругою для подвійного Т- подібного RC – мосту (рис.1.29).

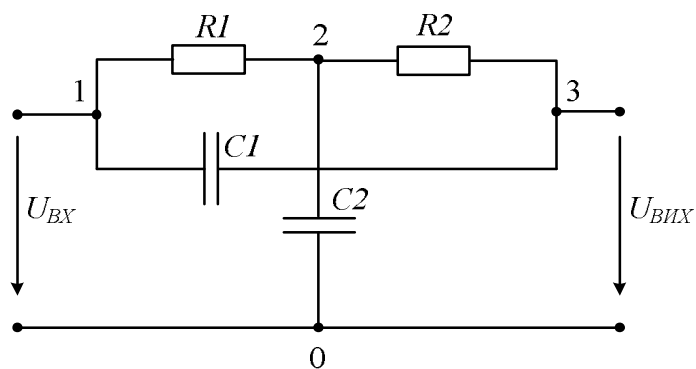


Рис.1.29. Схема подвійного Т-подібного RC-мосту

Матриця операторних провідностей:

$$Y(p) = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline pC_1+G_1 & -G_1 & -pC_1 \\ \hline -G_1 & pC_2+G_1+G_2 & -G_2 \\ \hline -pC_1 & -G_2 & pC_1+G_2 \\ \hline \end{array} \cdot$$

Коефіцієнт передачі за напругою за формулою (1.48):

$$K_U = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}},$$

$$\text{де } \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{array}{|c|c|} \hline -G_1 & pC_2+G_1+G_2 \\ \hline -pC_1 & -G_2 \\ \hline \end{array} = p^2 C_1 C_2 + p C_1 (G_1 + G_2) + G_1 G_2;$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{array}{|c|c|} \hline pC_2+G_1+G_2 & -G_2 \\ \hline -G_2 & pC_1+G_2 \\ \hline \end{array} = p^2 C_1 C_2 + p [C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2] + G_1 G_2.$$

Остаточно

$$K_U(p) = \frac{p^2 C_1 C_2 + p C_1 (G_1 + G_2) + G_1 G_2}{p^2 C_1 C_2 + p [C_1 (G_1 + G_2) + C_2 G_2] + G_1 G_2}.$$

1.8.3. Операторний коефіцієнт передачі за струмом. Операторні перехідні й вхідні опори та провідності

Нехай між вихідними затискачами включена провідність навантаження $G_n = 1/R_n$ (рис.1.26, а), яка враховується в матриці операторних провідностей. Тоді **операторний коефіцієнт передачі за струмом** визначається формулою

$$K_I(p) = \frac{I_{BHX}(p)}{I_{BX}(p)} = \frac{(\varphi_c - \varphi_d) G_n}{J} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)} G_n}{\Delta}. \quad (1.49, \text{ а})$$

У випадку триполюсної схеми

$$K_I(p) = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} G_n. \quad (1.49, б)$$

Передатний опір в загальному випадку

$$Z_{ПЕР}(p) = \frac{U_{ВНХ}(p)}{I_{ВХ}(p)} = \frac{(\varphi_c - \varphi_d)}{J} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta} = K_I(p) R_n, \quad (1.50, а)$$

та для триполюсної схеми

$$Z_{ПЕР}(p) = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta}. \quad (1.50, б)$$

Передатна провідність в загальному випадку

$$Y_{ПЕР}(p) = \frac{I_{ВНХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{(\varphi_c - \varphi_d) G_n}{(\varphi_a - \varphi_b)} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)} G_n}{\Delta_{(a+b)(a+b)}} = K_U(p) G_n, \quad (1.51, а)$$

та для триполюсної схеми

$$Y_{ПЕР}(p) = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_{11}} G_n. \quad (1.51, б)$$

В загальному випадку $Z_{ПЕР}(p) \neq 1 / Y_{ПЕР}(p)$.

Приклад 1-25. Знайти величини $Z_{ПЕР}(p), Y_{ПЕР}(p)$ для П-подібної схеми (рис.1.30).

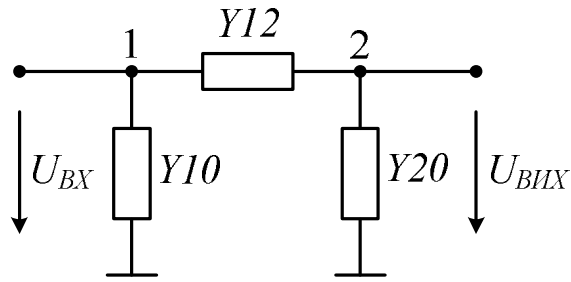


Рис.1.29. П - подібна схема

Матриця операторних провідностей:

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline Y_{12}+Y_{10} & -Y_{12} \\ \hline -Y_{12} & Y_{12}+Y_{20} \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}.$$

$$Z_{\text{ПЕР}}(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{(-1)^{1+2}(-Y_{12})}{(Y_{12}+Y_{10})(Y_{12}+Y_{20})-Y_{12}^2} = \frac{Y_{12}}{Y_{12}(Y_{10}+Y_{20})+Y_{10}Y_{20}}.$$

$$Y_{\text{ПЕР}}(p) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} G_H = \frac{Y_{12}Y_{20}}{Y_{12}+Y_{20}}.$$

Дійсно, $Z_{\text{ПЕР}}(p) \neq 1/Y_{\text{ПЕР}}(p)$.

Вхідний опір

$$Z_{BX}(p) = \frac{U_{BX}(p)}{I_{BX}(p)} = \frac{(\varphi_a - \varphi_b)}{J} = \frac{\Delta_{(a+b)(a+b)}}{\Delta} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}. \quad (1.52)$$

Вхідна провідність

$$Y_{BX}(p) = \frac{I_{BX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{1}{Z_{BX}(p)} = \frac{\Delta}{\Delta_{(a+b)(a+b)}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}. \quad (1.53)$$

Останні дві величини є взаємно оберненими: $Z_{BX}(p) = 1/Y_{BX}(p)$.

Контрольні запитання та завдання до розділу 1

1. Дайте визначення перехідного процесу.
2. Сформулюйте закони комутації.
3. Як скласти еквівалентну схему для визначення початкових умов для розрахунку перехідного процесу в колі постійного струму?
4. Як визначити порядок електричного кола?
5. В чому полягає сутність класичного методу розрахунку перехідних процесів?
6. Дайте визначення сталої часу кола першого порядку та часу перехідного процесу.
7. Запишіть узагальнену формулу для розрахунку перехідних процесів в колі постійного струму першого порядку.
8. Сформулюйте методику розрахунку перехідних процесів в колі синусоїдного струму першого порядку за узагальненою формулою.
9. Що таке рівняння стану електричного кола?
10. Сформулюйте спосіб формування рівняння стану електричного кола без особливостей.
11. Як сформувати рівняння стану детермінованого процесу?
12. В чому полягає метод перехідної матриці для розв'язання рівняння стану?
13. Сформулюйте послідовність етапів розрахунку матричної експоненти для системи другого порядку.
14. Наведіть формулу розв'язання рівняння стану для кіл постійного струму другого порядку.
15. Сформулюйте сутність схемотехнічного методу розрахунку перехідних процесів.

16. Наведіть послідовність аналізу перехідних режимів у колах другого порядку схемотехнічним методом.
17. Які Ви знаєте режими зміни вільних складових перехідного процесу в колі другого порядку.
18. Сформулюйте умову настання та характер зміни вільної складової перехідного процесу в аперіодичному режимі кола другого порядку.
19. Сформулюйте умову настання та характер зміни вільної складової перехідного процесу в коливальному режимі кола другого порядку.
20. Порядок розрахунку сталих інтегрування вільної складової перехідного процесу в колі 2-го порядку.
21. Наведіть формулу перетворення Лапласа та сформулюйте його основні властивості.
22. Наведіть формули операторних опорів та провідностей реактивних елементів.
23. Сформулюйте спосіб переходу від зображення до оригіналу на основі теореми розкладання.
24. В чому полягає операторний метод формування характеристичного рівняння кола другого порядку?
25. Як знайти операторний коефіцієнт передачі за напругою пасивного електричного кола, представленого пасивним чотириполусником?
26. Наведіть формулу для операторного коефіцієнта передачі за напругою кола з трьома зовнішніми затискачами.

Список літератури до розділу 1

1. Артеменко, М.Ю. Матричні методи в теорії електричних та електронних кіл: навч. посібник [Текст] / М. Ю. Артеменко, Ю. Є. Кулешов, Ю. І. Якименко – К.: КНУТД, 2008. – 156 с.
2. Новгородцев, А.Б. 30 лекций по теории электрических цепей [Електронний ресурс] / А.Б. Новгородцев. – СПбГПУ, 2002. – Режим доступу: http://eelib.narod.ru/toe/Novg_2.01/index.htm – Дата доступу: жовтень 2014.
3. Коваль, Ю. В. Основы теории кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч. 2 [Текст] / Ю. В. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін. – Харків: Компанія СМІТ, 2008. – 560 с.
4. Сигорский, В.П. Математический аппарат инженера [Текст] / В.П. Сигорский. –К.: Техніка, 1975. — 768 с.
5. Артеменко, М. Ю. Спеціальні розділи теорії електричних кіл: методичні вказівки до виконання курсової роботи на тему «Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах» для студентів напряму підготовки 6.050803 «Акустотехніка» [Текст] / М. Ю. Артеменко, К. С. Дрозденко. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 55 с.
6. Воробкевич, А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки [Текст] / А. Ю. Воробкевич, О. І. Шегедин, В. С. Маляр, Р. Я. Совин. – К.: Магнолія Плюс, 2004. – 224 с.
7. Шебес, М. Р. Сборник задач по теории линейных электрических цепей [Текст] / М.Р. Шебес, М.В. Каблукова. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

2.1. Загальна характеристика та системи первинних параметрів чотириполюсників

2.1.1. Основні поняття та класифікація чотириполюсників

Чотириполюсником називається електричне коло довільної складності, у якого виділені дві пари полюсів (затискачів), в межах кожної з яких протікає однаковий струм (рис.2.1).

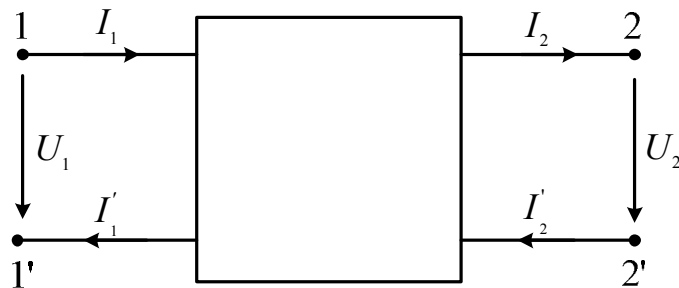


Рис. 2.1. Схема чотириполюсника

Пару полюсів, до яких приєднують джерело живлення, називають первинними або вхідними затискачами та позначають $1, 1'$. Пару полюсів, до яких приєднують навантаження, називають вторинними або вихідними затискачами та позначають $2, 2'$.

Класифікують чотириполюсника за такими ознаками.

1) За характеристиками елементів.

Лінійним називається чотириполюсник, який складається з лінійних елементів. Елементи лінійного чотириполюсника позначають комплексними опорами \bar{z}_i або провідностями \bar{y}_i , що відображають реакції на впливи синусоїдної форми. В подальшому позначення комплексної величини опускаємо. Якщо хоча б один елемент чотириполюсника нелінійний, чотириполюсник називається нелінійним.

2) За схемою внутрішніх з'єднань розрізняють такі основні типи чотириполіусників (рис. 2.2): а – Г-подібний; б – Т-подібний; в – П-подібний; г – мостовий; д – Т-подібний мостовий.

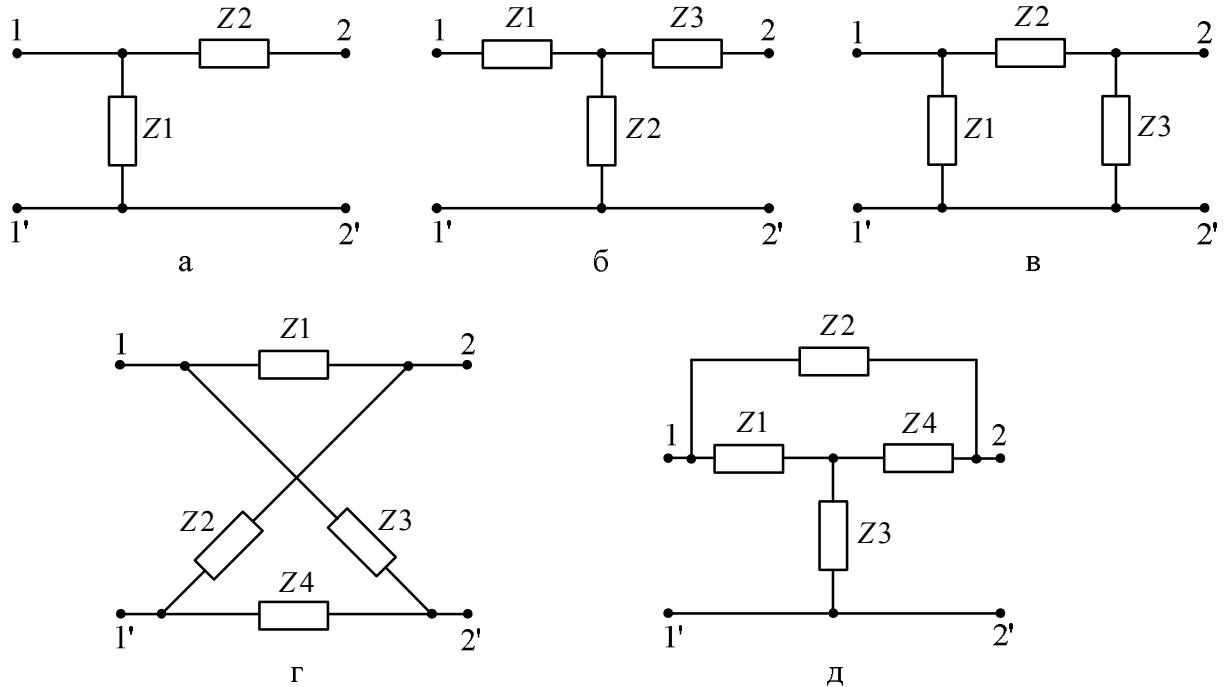


Рис. 2.2. Типи чотириполіусників за схемою внутрішніх з'єднань: а – Г-подібний; б – Т-подібний; в – П-подібний; г – мостовий; д – Т-подібний мостовий

3) За кількістю елементів.

Розрізняють одно-, двох-, трьох-, чотирьохелементні та багатоелементні. Г-подібний чотириполіусник – двохелементний, Т і П-подібні є трьохелементними, мостові – чотирьохелементними.

4) За наявністю чи відсутністю джерел енергії всередині чотириполіусника.

Пасивним називається чотириполіусник, в якому відсутні джерела електричної енергії. Активним називається чотириполіусник, в якому є хоча б одне джерело. Якщо ці джерела є автономними (або незалежними), чотириполіусник називається активним (автономним). Необхідна ознака

такого чотириполюсника: наявність напруги хоча б на одній парі розімкнених полюсів. Якщо чотириполюсник містить неавтономні (залежні) джерела, то його називають активним неавтономним.

5) За режимно-параметричними властивостями.

Два чотириполюсника називаються еквівалентними, якщо заміна одного іншим не спричиняє зміну струмів і напруг у зовнішньому колі, до якого приєднаний чотириполюсник. Чотириполюсник називається симетричним, якщо зміна місць його вхідних та вихідних затискачів не призводить до зміни струмів і напруг у зовнішньому колі.

2.1.2. Системи рівнянь лінійного пасивного чотириполюсника

Пасивний чотириполюсник може працювати у трьох режимах:

- прямої передачі (напрями струмів I_1 та I_2 наведені на рис. 2.1), коли енергія передається від первинних полюсів до вторинних;
- зворотної передачі (напрями струмів I_1' , I_2' протилежні зображенням на рис. 2.1), коли енергія передається від вторинних полюсів до первинних;
- двостороннього живлення (напрямок струму I_2' протилежний зображенню на рис. 2.1), коли енергія від зовнішніх джерел споживається всередині чотириполюсника.

Режим роботи будь-якого чотириполюсника повністю визначений, якщо відомі струми та напруги його первинних та вторинних затискачів (два струми та дві напруги, усього чотири величини). В залежності від контексту це можуть бути дійсні, або комплексні величини. Типовою є задача, коли дві з зазначених величин відомі, а дві потрібно розрахувати. Для цього використовують систему двох рівнянь з двома невідомими, яку називають основними рівняннями теорії чотириполюсників.

Оскільки дві змінні з чотирьох можна обрати $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ способами, то існують шість форм основних рівнянь чотириполіусників. Отримаємо систему рівнянь в Y-формі. Для цього будемо розглядати режим двостороннього живлення (рис. 2.3).

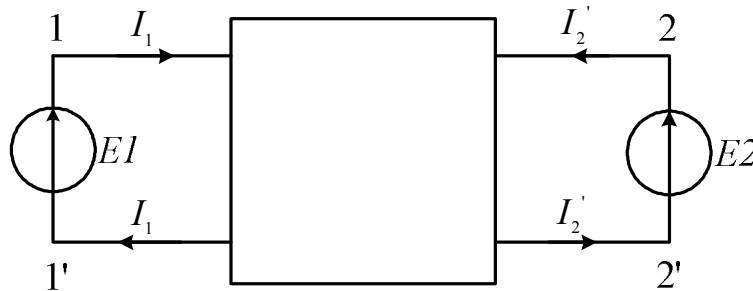


Рис. 2.3. Режим двостороннього живлення для визначення Y-параметрів чотириполіусника

Струми чотириполіусника можна визначити через параметри джерел та коефіцієнти $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$, які є входними та взаємними провідностями:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}E_1 + y_{12}E_2; \\ I_2' &= y_{21}E_1 + y_{22}E_2. \end{aligned}$$

За принципом взаємності $y_{12} = y_{21}$.

Замінивши відповідні ЕРС входною та вихідною напругами, отримаємо матричну систему рівнянь чотириполіусників в Y-формі:

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

де $\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Bmatrix}$ – матриця Y-параметрів чотириполіусника.

Систему рівнянь чотириполюсника у Z-формі отримаємо, виразивши з системи (2.1) напруги через струми:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} &= \mathbf{Y}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y_{22} / \Delta_Y & -y_{12} / \Delta_Y \\ -y_{21} / \Delta_Y & y_{11} / \Delta_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$ – матриця Z-параметрів чотириполюсника, яка є

симетричною відносно головної діагоналі: $z_{12} = z_{21}$.

Режим прямої передачі характеризується найуживанішою системою рівнянь чотириполюсників в A-формі, яка виражає вхідні величини через вихідні

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матриця A-параметрів.

Можна встановити такий зв'язок коефіцієнтів системи A-параметрів з коефіцієнтами системи Y-параметрів:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{y_{22}}{y_{21}}; & a_{12} &= -\frac{1}{y_{21}}; \\ a_{21} &= y_{12} - \frac{y_{22}y_{11}}{y_{21}}; & a_{22} &= -\frac{y_{11}}{y_{21}}. \end{aligned}$$

В системах Y- та Z-параметрів лише три з чотирьох параметрів були незалежними. Існує аналітичний зв'язок і між чотирма коефіцієнтами системи A-параметрів:

$$\det \mathbf{A} = \Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1.$$

Режим зворотної передачі характеризується системою В-параметрів, в якій вихідні змінні виражаються через вхідні.

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ I_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1' \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1' \end{Bmatrix},$$

$$\text{де } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} - \text{матриця В-параметрів.}$$

Рівність $a_{11} = a_{22}$ є ознакою симетричного чотириполюсника.

Існують також система Н-параметрів чотириполюсника

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ I_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

та система G-параметрів чотириполюсника

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ I_2' \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} U_1 \\ I_2' \end{Bmatrix}.$$

Коефіцієнти, які визначають зв'язок між зовнішніми напругами і струмами чотириполюсника, називаються його первинними параметрами. Отже, існує шість форм первинних параметрів чотириполюсників, структурованих у вигляді матриць $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$. Формули переходу від одних параметрів до інших зведено в таб. 2.1. Символом Δ позначений визначник відповідної матриці параметрів.

Таблица 2.1

	A	B	G	H	Y	Z
A	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{b_{22}}{\Delta_B} & -\frac{b_{12}}{\Delta_B} \\ -\frac{b_{21}}{\Delta_B} & \frac{b_{11}}{\Delta_B} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{g_{21}} & -\frac{g_{22}}{g_{21}} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & -\frac{\Delta_G}{g_{21}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{\Delta_H}{h_{21}} & \frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & \frac{1}{h_{21}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & \frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta_Y}{y_{21}} & \frac{y_{11}}{y_{21}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & -\frac{\Delta_Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & -\frac{z_{22}}{z_{21}} \end{vmatrix}$
B	$\begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_A} & -\frac{a_{12}}{\Delta_A} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta_A} & \frac{a_{11}}{\Delta_A} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{\Delta_G}{g_{12}} & \frac{g_{22}}{g_{12}} \\ -\frac{g_{11}}{g_{12}} & \frac{1}{g_{12}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{h_{12}} & -\frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & -\frac{\Delta_H}{h_{12}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & \frac{1}{y_{12}} \\ -\frac{\Delta_Y}{y_{12}} & \frac{y_{22}}{y_{12}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & -\frac{\Delta_Z}{z_{12}} \\ \frac{1}{z_{12}} & -\frac{z_{11}}{z_{12}} \end{vmatrix}$
G	$\begin{vmatrix} \frac{a_{21}}{a_{11}} & \frac{\Delta_A}{a_{11}} \\ \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{b_{21}}{b_{22}} & \frac{1}{b_{22}} \\ \frac{\Delta_B}{b_{22}} & \frac{b_{12}}{b_{22}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{h_{22}}{\Delta_H} & -\frac{h_{12}}{\Delta_H} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta_H} & \frac{h_{11}}{\Delta_H} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\Delta_Y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta_Z}{z_{11}} \end{vmatrix}$
H	$\begin{vmatrix} \frac{a_{12}}{a_{22}} & \frac{\Delta_A}{a_{22}} \\ \frac{1}{a_{22}} & -\frac{a_{21}}{a_{22}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \frac{1}{b_{11}} \\ -\frac{\Delta_B}{b_{11}} & \frac{b_{21}}{b_{11}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{g_{22}}{\Delta_G} & -\frac{g_{12}}{\Delta_G} \\ -\frac{g_{21}}{\Delta_G} & \frac{g_{11}}{\Delta_G} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta_Y}{y_{11}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\Delta_Z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{vmatrix}$
Y	$\begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{\Delta_A}{a_{12}} \\ \frac{1}{a_{12}} & -\frac{a_{11}}{a_{12}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{b_{11}}{b_{12}} & \frac{1}{b_{12}} \\ -\frac{\Delta_B}{b_{12}} & \frac{b_{22}}{b_{12}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\Delta_G}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & \frac{1}{g_{22}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_H}{h_{11}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta_Z} & -\frac{z_{12}}{\Delta_Z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_Z} & \frac{z_{11}}{\Delta_Z} \end{vmatrix}$
Z	$\begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{a_{21}} & -\frac{\Delta_A}{a_{21}} \\ \frac{1}{a_{21}} & -\frac{a_{22}}{a_{21}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\frac{b_{22}}{b_{21}} & \frac{1}{b_{21}} \\ -\frac{\Delta_B}{b_{21}} & \frac{b_{11}}{b_{21}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{g_{11}} & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta_G}{g_{11}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{\Delta_H}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta_Y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_Y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_Y} & \frac{y_{11}}{\Delta_Y} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}$

2.1.3. Експериментальне визначення первинних параметрів чотириполюсника за дослідом холостого ходу та короткого замикання

Експериментально можуть бути визначені А-параметри чотириполюсника, які за потребою перераховуються в інші параметри відповідно до табл. 2.1.

Запишемо комплексну систему скалярних рівнянь для А-параметрів, що впливає з (2.3):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \bar{a}_{11}\dot{U}_2 + \bar{a}_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \bar{a}_{21}\dot{U}_2 + \bar{a}_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

З першого рівняння за умови $\dot{I}_2 = 0$, що відповідає режиму холостого ходу, випливає

$$\bar{a}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2 = 0} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{XX}.$$

Аналогічно, в цьому ж режимі

$$\bar{a}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2 = 0} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{XX}.$$

В досліді короткого замикання ($\dot{U}_2 = 0$) визначаємо

$$\bar{a}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2 = 0} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{KЗ}; \quad \bar{a}_{22} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2 = 0} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{KЗ}.$$

Для проведення фізичного експерименту потрібне джерело синусоїдної напруги, шунт, що перетворює струм в напругу, та

двохпроменевий осцилограф для вимірювання зсуву фаз між вхідними та вихідними величинами.

Приклад 2-1. Отримати вирази для А-параметрів Т-подібного чотириполюсника (рис. 2.2, б).

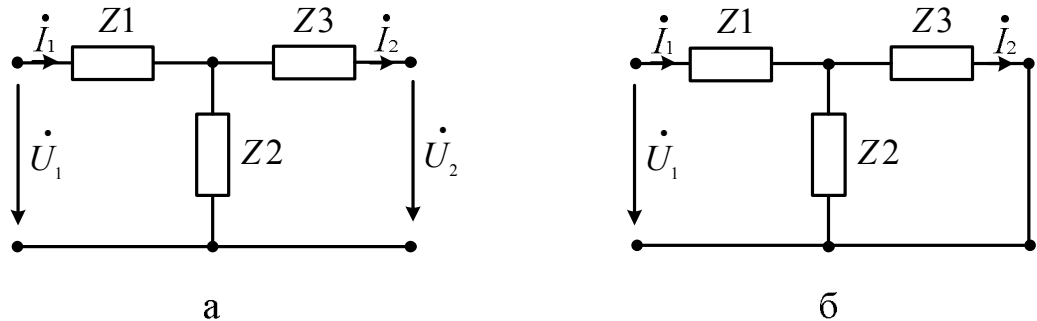


Рис. 2.4. Схеми для визначення А-параметрів Т-подібного чотириполюсника: а – в режимі холостого ходу, б – в режимі короткого замикання

В режимі холостого ходу (рис. 2.4, а) визначаємо

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{Z_2} = \dot{I}_1 Z_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Тоді

$$\bar{a}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{XX} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}; \quad \bar{a}_{21} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{XX} = \frac{1}{Z_2}.$$

В режимі короткого замикання (рис. 2.4, б) визначаємо

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{U}_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}.$$

Тоді

$$\bar{a}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{K3} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}.$$

Останній коефіцієнт визначаємо, застосувавши правило чужого опору:

$$\bar{a}_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \bigg|_{KZ} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2}.$$

2.2. Еквівалентні схеми, перетворення з'єднань та схемні функції чотириполіусників

2.2.1. Еквівалентні схеми чотириполіусників

Електричне коло довільної складності всередині пасивного чотириполіусника може бути представлене еквівалентною схемою з мінімальною кількістю елементів. Оскільки система первинних параметрів у будь якій формі має лише три незалежних коефіцієнти з чотирьох, еквівалентна схема чотириполіусників містить три комплексні опори. Найпоширенішими є Т- та П-подібні еквівалентні схеми (рис. 2.2, а, б). Розглянемо Т-подібну схему (рис. 2.2, б) та визначимо параметри її елементів.

За першим законом Кірхгофа:

$$I_1 = I_2 + \frac{I_2 Z_3 + U_2}{Z_2} = \frac{U_2}{Z_2} + \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right) I_2.$$

За другим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= I_1 Z_1 + I_2 Z_3 + U_2 = \left[\frac{U_2}{Z_2} + I_2 \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2} \right) \right] Z_1 + I_2 Z_3 + U_2 = \\
 &= \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) U_2 + \left(Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \right) I_2.
 \end{aligned}$$

Порівнюємо коефіцієнти в круглих дужках з системою А-параметрів

$$\begin{aligned}
 I_1 &= a_{21} U_2 + a_{22} I_2 \\
 U_1 &= a_{11} U_2 + a_{12} I_2
 \end{aligned}$$

та виражаємо через них невідомі значення комплексних опорів

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Z_2} &= a_{21} \Rightarrow Z_2 = \frac{1}{a_{21}}; \\
 1 + \frac{Z_1}{Z_2} &= a_{11} \Rightarrow Z_1 = Z_2 (a_{11} - 1) = \frac{a_{11} - 1}{a_{21}}; \\
 1 + \frac{Z_3}{Z_2} &= a_{22} \Rightarrow Z_3 = Z_2 (a_{22} - 1) = \frac{a_{22} - 1}{a_{21}}.
 \end{aligned}$$

Розглянемо П-подібну еквівалентну схему (рис. 2.2, в). Значення опорів визначаються з такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; \quad a_{12} = Z_1; \\
 a_{21} &= \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_1}{Z_2 Z_3}; \quad a_{22} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}.
 \end{aligned}$$

Звідки

$$Z_1 = a_{12}; \quad Z_2 = \frac{a_{12}}{a_{22} - 1}; \quad Z_3 = \frac{a_{12}}{a_{11} - 1}.$$

2.2.2. Еквівалентні перетворення стандартних з'єднань чотириполіусників

До стандартних з'єднань чотириполіусників належать такі їх з'єднання між собою, за яких параметри еквівалентного чотириполіусника найпростіше виражаються через параметри чотириполіусників-складників. Оскільки існує шість форм первинних параметрів, стільки ж існує варіантів стандартних з'єднань.

Розглянемо каскадне з'єднання чотириполіусників (рис. 2.5). Два чотириполіусника утворюють каскадне з'єднання, якщо вихідні затискачі першого є входними затискачами другого.

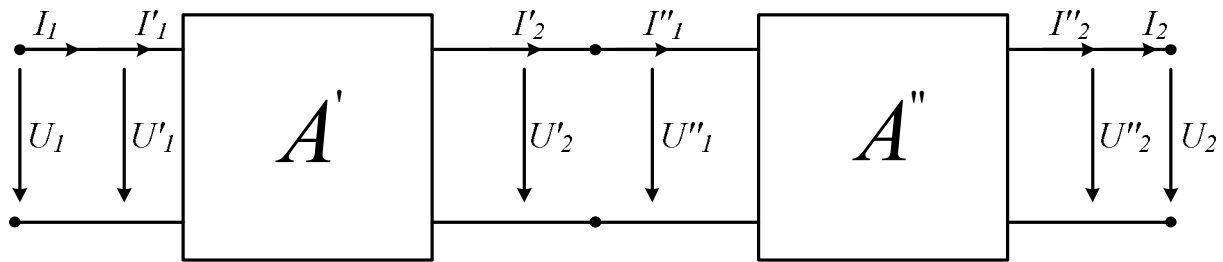


Рис. 2.5. Каскадне з'єднання чотириполіусників

Знайдемо зв'язок входних та вихідних величин еквівалентного чотириполіусника та чотириполіусників – складників:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U'_1 \\ I'_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} U'_2 \\ I'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U''_1 \\ I''_1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} U''_2 \\ I''_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Bmatrix}.$$

Виразимо входні змінні еквівалентного чотириполіусника через його вихідні змінні, використовуючи зазначені зв'язки:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U'_1 \\ I'_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{Bmatrix} U'_2 \\ I'_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{Bmatrix} U''_1 \\ I''_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{Bmatrix} U''_2 \\ I''_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{Bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Для еквівалентного чотириполюсника вхідні та вихідні змінні пов'язанні матрицею А-параметрів:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

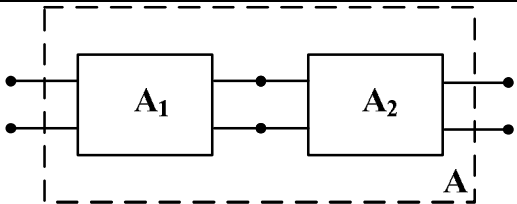
Із порівняння виразів (2.4) та (2.5) встановлюємо, що

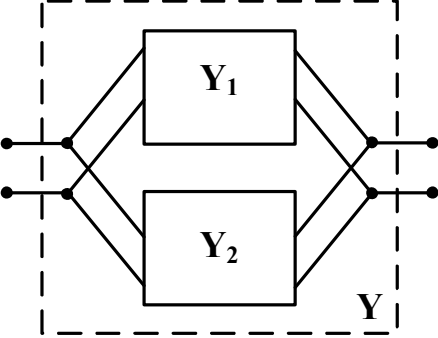
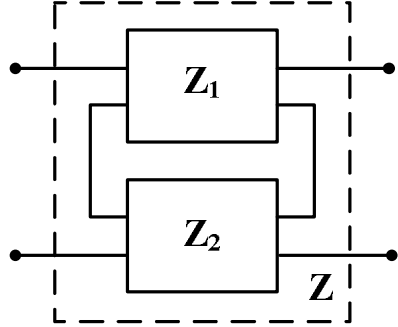
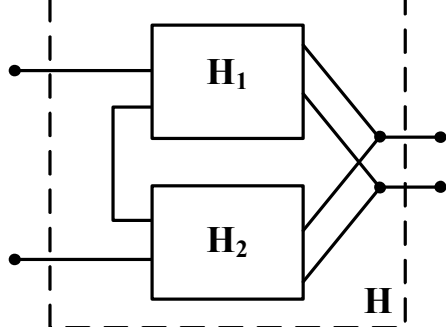
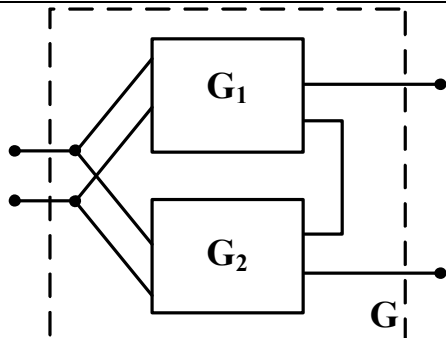
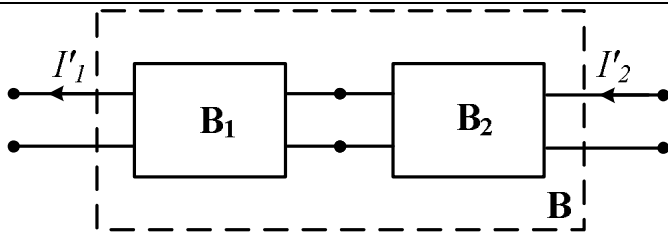
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \mathbf{A}''. \quad (2.6)$$

Таким чином, при каскадному з'єднанні чотириполюсників матриця А-параметрів еквівалентного чотириполюсника дорівнює добутку матриць А-параметрів чотириполюсників-складників в послідовності від вхідних до вихідних затискачів.

Аналогічні співвідношення для матриць певних первинних параметрів чотириполюсників можна встановити для кожного з шести стандартних з'єднань, представлених в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

№	Стандартне з'єднання	Схема з'єднання	Перетворення матриць параметрів
1	Каскадне		$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$

2	Паралельне		$Y = Y_1 + Y_2$
3	Послідовне		$Z = Z_1 + Z_2$
4	Послідовно-паралельне		$H = H_1 + H_2$
5	Паралельно-послідовне		$G = G_1 + G_2$
6	Зворотно-каскадне		$B = B_2 B_1$

2.2.3. Схемні функції чотириполюсника

Нехай відома система А-параметрів чотириполюсника, а його вихідне коло навантажене опором Z_n (рис. 2.6).

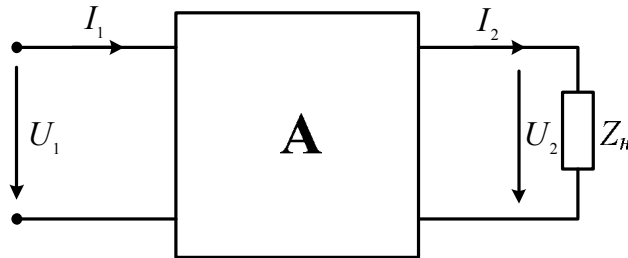


Рис. 2.6. Навантажений чотириполюсник, що описується системою А-параметрів

Для даного чотириполюсника можна скласти систему трьох рівнянь, що пов'язують вхідні ті вихідні змінні:

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}I_2; \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}I_2; \\ U_2 = I_2Z_n. \end{cases} \quad (2.7)$$

Через зазначенні параметри визначаємо такі схемні функції:

1. Коефіцієнт передачі за напругою, що визначається виразом

$$K_U = \frac{U_2}{U_1}.$$

Якщо в перше рівняння системи (2.7) підставити $I_2 = \frac{U_2}{Z_n}$, отримаємо

$$U_1 = a_{11}U_2 + \frac{a_{12}}{Z_n}U_2 = U_2 \left(a_{11} + \frac{a_{12}}{Z_n} \right).$$

Звідси

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{a_{11} + \frac{a_{12}}{Z_n}} = \frac{Z_n}{a_{11}Z_n + a_{12}}. \quad (2.8)$$

2. Коефіцієнт передачі за струмом, що визначається виразом

$$K_I = \frac{I_2}{I_1}.$$

Якщо третє рівняння системи (2.7) підставити у друге, отримаємо

$$I_1 = a_{21}I_2Z_n + a_{22}I_2 = I_2(a_{21}Z_n + a_{22}).$$

Звідси

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{a_{21}Z_n + a_{22}}. \quad (2.9)$$

3. Вхідний опір чотириполіюсника

$$Z_{BX} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{a_{11}I_2Z_n + a_{12}I_2}{a_{21}I_2Z_n + a_{22}I_2} = \frac{a_{11}Z_n + a_{12}}{a_{21}Z_n + a_{22}}. \quad (2.10)$$

Отримаємо значення в режимах короткого замикання і холостого ходу:

$$Z_{BX}^{XX} = Z_{BX} \Big|_{Z_n \rightarrow \infty} = \lim_{Z_n \rightarrow \infty} \frac{a_{11} + \frac{a_{12}}{Z_n}}{a_{21} + \frac{a_{22}}{Z_n}} = \frac{a_{11}}{a_{21}}.$$

4. Передатний опір чотириполіюсника

$$Z_{пер} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_H}{a_{21}Z_H + a_{22}}. \quad (2.11)$$

5. Передатна провідність чотириполюсника

$$Y_{пер} = \frac{I_2}{U_1} = \frac{I_2}{U_2} \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{a_{11}Z_H + a_{12}}. \quad (2.12)$$

2.3. Характеристичні параметри чотириполюсника

До характеристичних параметрів чотириполюсника відносять характеристичні опори та характеристичну сталу передачі в режимі узгодження чотириполюсника за потужністю з генератором та навантаженням.

2.3.1. Характеристичні опори чотириполюсника

Для несиметричного ($a_{11} \neq a_{22}$) чотириполюсника характеристичними є два опори Z_{C1}, Z_{C2} , такі, що при підключенні Z_{C2} до вихідних затискачів (рис. 2.7, а) вхідним опором чотириполюсника є Z_{C1} , а при підключенні Z_{C1} до вхідних затискачів (рис. 2.7, б) вхідним опором чотириполюсника є Z_{C2} .

Перше рівняння для визначення характеристичних опорів отримаємо, підставивши у формулу для вхідного опору навантаженого чотириполюсника, що описується системою А-параметрів

$$Z_{BX} = \frac{a_{11}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{22}}$$

значення $Z_{BX} = Z_{C1}$, $Z_H = Z_{C2}$.

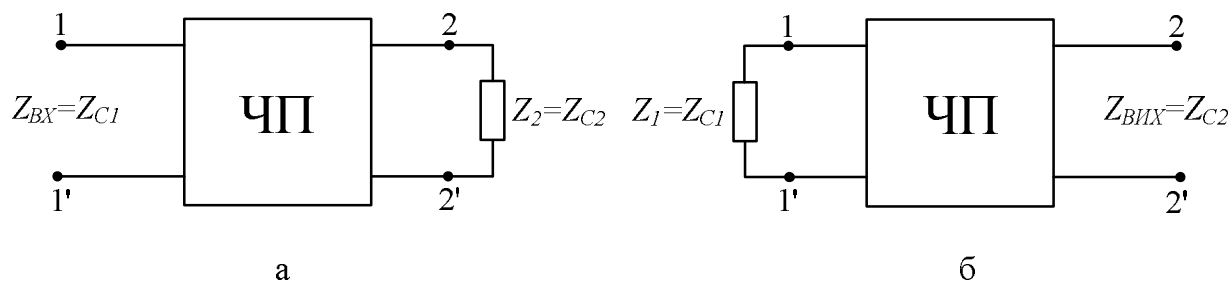


Рис. 2.7. Система дослідів для визначення характеристичних опорів чотириполюсника

Друге рівняння отримаємо з аналізу зворотного включення чотириполюсника, який характеризується системою В-параметрів, що отримують взаємною заміною $a_{11} \leftrightarrow a_{22}$.

В результаті отримаємо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} Z_{C1} = \frac{a_{11}Z_{C2} + a_{12}}{a_{21}Z_{C2} + a_{22}}; \\ Z_{C2} = \frac{a_{22}Z_{C1} + a_{12}}{a_{21}Z_{C1} + a_{11}}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Розв'язками цієї системи є значення характеристичних опорів, виражених через систему А-параметрів:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}; Z_{C2} = \sqrt{\frac{a_{22}a_{12}}{a_{21}a_{11}}}. \quad (2.14)$$

Якщо ЧП симетричний ($a_{11} = a_{22}$), то

$$Z_{C1} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}.$$

2.3.2. Узгоджений режим роботи чотириполюсника

Цей режим має місце, якщо несиметричний чотириполюсник з характеристичними опорами Z_{C1}, Z_{C2} увімкнути між генератором з внутрішнім опором $Z_r = Z_{C1}$ (рис. 2.8) та навантаженням $Z_n = Z_{C2}$. В цьому режимі генератор передає енергію в навантаження характеризується максимальною активною потужністю.

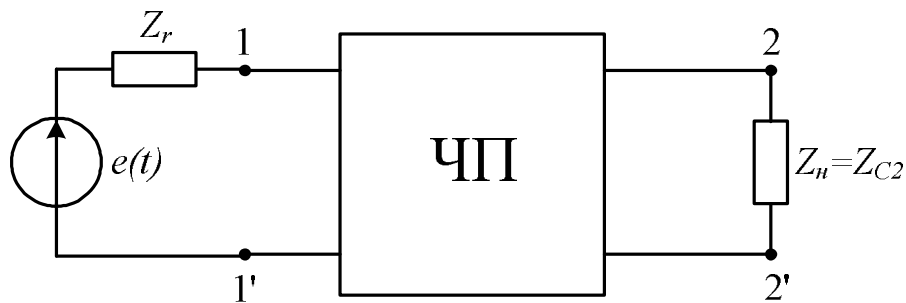


Рис. 2.8. Схема роботи чотириполюсника в узгодженому режимі

Для врахування втрат енергії в чотириполюснику в узгодженому режимі вводять характеристичну сталу передачі

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}.$$

Оскільки всі струми й напруги знаходяться в режимі узгодження, $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{C1}$; $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_{C2}$, а вираз для характеристичної сталої передачі набуває вигляду

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \ln \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \right) = \ln \left[(a_{21} Z_{C2} + a_{22}) \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \right] = \\ &= \ln \left[\left(a_{21} \sqrt{\frac{a_{22} a_{12}}{a_{11} a_{21}}} + a_{22} \right) \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} \right] = \ln \left(\sqrt{a_{21} a_{12}} + \sqrt{a_{11} a_{22}} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Якщо чотириполюсник симетричний $Z_{C1} = Z_{C2}$, тоді

$$\underline{\gamma} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}.$$

Розпишемо відношення комплексів діючих значень

$$\underline{\gamma} = \ln \frac{U_1 e^{j\varphi_1}}{U_2 e^{j\varphi_2}} = \ln \left[\frac{U_1}{U_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] = \alpha + j\beta.$$

Дійсна частина характеристичної сталої передачі $\alpha = \ln(U_1 / U_2)$ називається коефіцієнтом загасання. Він характеризує міру зменшення амплітуд напруги й струму узгодженого чотириполюсника при переході від входу до виходу та вимірюється в логарифмічних одиницях. Уявна частина характеристичної сталої передачі $\beta = \varphi_1 - \varphi_2$ називається коефіцієнтом фази й характеризує зсув фаз між вхідними й вихідними напругами чи струмами узгодженого чотириполюсника та вимірюється в радіанах або градусах.

Існує дві логарифмічні міри для коефіцієнта загасання α . При застосуванні натуральних логарифмів коефіцієнт загасання $\alpha = \ln(U_1 / U_2)$ вимірюється в неперах. Коефіцієнт загасання чотириполюсника в 1 Нп відповідає тому, що $U_1 = eU_2$, тобто амплітуда вхідної напруги перевищує амплітуду вихідної напруги приблизно в 2,718 разів. При застосуванні десяткових логарифмів коефіцієнт загасання

$$\alpha = \lg(S_1 / S_2) = [\lg(U_1 / U_2) + \lg(I_1 / I_2)] = 2 \lg(U_1 / U_2)$$

вимірюється в белах.

Частіше використовують одиницю виміру коефіцієнта загасання децибел:

$$1 \text{ дБ} = 0,1 \text{ Б.}$$

Встановимо зв'язок між зазначеними одиницями.

$$\begin{aligned}\alpha[\text{дБ}] &= 10 \lg(S_1 / S_2) = 20 \lg(U_1 / U_2) = \\ &= 20 \lg e^{\alpha[\text{Нп}]} = 20(\lg e) \alpha[\text{Нп}] = 8,686 \alpha[\text{Нп}].\end{aligned}$$

Таким чином, $1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ}$; $1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}$.

Виразимо систему рівнянь чотириполюсника в А-формі в узгодженому режимі через характеристичні параметри. З формули (2.15) випливає, що

$$e^{\underline{\gamma}} = \sqrt{a_{21} a_{12}} + \sqrt{a_{11} a_{22}}.$$

Обернена величина з урахуванням властивості визначника матриці А-параметрів пасивного чотириполюсника набуває вигляду

$$e^{-\underline{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{a_{21} a_{12}} + \sqrt{a_{11} a_{22}}} = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}} - \sqrt{a_{21} a_{12}}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = \sqrt{a_{11} a_{22}} - \sqrt{a_{21} a_{12}}.$$

Середні геометричні значення А- параметрів можна виразити наступним чином:

$$\begin{aligned}\sqrt{a_{11} a_{22}} &= \frac{e^{\underline{\gamma}} + e^{-\underline{\gamma}}}{2} = \text{ch}(\underline{\gamma}); \\ \sqrt{a_{21} a_{12}} &= \frac{e^{\underline{\gamma}} - e^{-\underline{\gamma}}}{2} = \text{sh}(\underline{\gamma}).\end{aligned}\tag{2.16}$$

З формули (2.14) випливають властивості добутку та частки характеристичних опорів:

$$Z_{C1}Z_{C2} = \frac{a_{12}}{a_{21}}; \frac{Z_{C1}}{Z_{C2}} = \frac{a_{11}}{a_{22}}. \quad (2.17)$$

З урахуванням співвідношень (2.16), (2.17) уся система А-параметрів може бути виражена через характеристичні параметри чотириполюсника:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}); a_{12} = \sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}); \\ a_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}); a_{22} = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

і система рівнянь чотириполюсника в узгодженому режимі набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}) \dot{U}_2 + \sqrt{Z_{C1}Z_{C2}} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}) \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{\sqrt{Z_{C1}Z_{C2}}} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}) \dot{U}_2 + \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}) \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В режимі характеристичного узгодження $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_{C2}$, і справедливі вирази для коефіцієнтів передачі за напругою та струмом:

$$k_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} e^{-\underline{\gamma}}; k_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} e^{-\underline{\gamma}}. \quad (2.20)$$

Для симетричного чотириполюсника система рівнянь (2.19) спрощуються, оскільки $Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C$:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \text{ch}(\underline{\gamma})\dot{U}_2 + Z_C \text{sh}(\underline{\gamma})\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 &= Z_C^{-1} \text{sh}(\underline{\gamma})\dot{U}_2 + \text{ch}(\underline{\gamma})\dot{I}_2,\end{aligned}$$

а коефіцієнтів передачі стають однаковими:

$$k_U = k_I = e^{-\underline{\gamma}}.$$

2.3.3. Визначення характеристичних параметрів чотириполюсника з дослідів холостого ходу та короткого замикання

З урахуванням співвідношень $Z_{BX}^{XX} = a_{11} / a_{21}$; $Z_{BX}^{K3} = a_{12} / a_{22}$ характеристичні опори, що визначаються виразом (2.14), можуть бути знайдені з дослідів холостого ходу та короткого замикання аналітичним чи експериментальним шляхом:

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{21}} \frac{a_{12}}{a_{22}}} = \sqrt{Z_{BX}^{XX} Z_{BX}^{K3}}; Z_{C2} = \sqrt{Z_{BIX}^{XX} Z_{BIX}^{K3}}. \quad (2.21)$$

Таким чином, перший та другий характеристичні опори є середніми геометричними значеннями, відповідно, вхідних та вихідних опорів в режимах ХХ та КЗ.

Розділивши ліві та праві частини рівняння (2.16), матимемо вираз для визначення характеристичної сталої передачі:

$$\text{th}(\underline{\gamma}) = \sqrt{\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}}} = \sqrt{\frac{a_{12} / a_{22}}{a_{11} / a_{21}}} = \sqrt{\frac{Z_{BX}^{K3}}{Z_{BX}^{XX}}},$$

звідки

$$\begin{aligned}
\underline{\gamma} &= \frac{1}{2} \ln(e^{2\underline{\gamma}}) = \frac{1}{2} \ln \frac{\text{ch}(\underline{\gamma}) + \text{sh}(\underline{\gamma})}{\text{ch}(\underline{\gamma}) - \text{sh}(\underline{\gamma})} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \text{th}(\underline{\gamma})}{1 - \text{th}(\underline{\gamma})} = \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{Z_{BX}^{K3} / Z_{BX}^{XX}}}{1 - \sqrt{Z_{BX}^{K3} / Z_{BX}^{XX}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{Z_{BX}^{XX}} + \sqrt{Z_{BX}^{K3}}}{\sqrt{Z_{BX}^{XX}} - \sqrt{Z_{BX}^{K3}}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Приклад 2-2. Знайти характеристичні параметри Т-подібного симетричного ($Z_1 = Z_3$) чотирьохполюсника (рис. 2.2, б) за аналітичними дослідженнями холостого ходу та короткого замикання.

Знайдемо величину вхідного опору в режимі холостого ходу:

$$Z_{BX}^{XX} = Z_1 + Z_2 = Z_1(1 + k_z);$$

де $k_z = Z_2 / Z_1$.

Значення вхідного опору в режимі короткого замикання

$$Z_{BX}^{K3} = Z_1 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = Z_1 \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = Z_1 \left(1 + \frac{k_z}{1 + k_z} \right).$$

За формулою (2.21)

$$Z_{C1} = Z_{C2} = Z_C = \sqrt{Z_{BX}^{XX} Z_{BX}^{K3}} = Z_1 \sqrt{1 + 2k_z}.$$

За формулою (2.22)

$$\begin{aligned}
\underline{\gamma} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{Z_{BX}^{XX}} + \sqrt{Z_{BX}^{K3}}}{\sqrt{Z_{BX}^{XX}} - \sqrt{Z_{BX}^{K3}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+k_z} + \sqrt{\frac{1+2k_z}{1+k_z}}}{\sqrt{1+k_z} - \sqrt{\frac{1+2k_z}{1+k_z}}} = \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1+k_z + \sqrt{1+2k_z}}{1+k_z - \sqrt{1+2k_z}} = \ln \frac{1+k_z + \sqrt{1+2k_z}}{k_z}.
\end{aligned}$$

Контрольні запитання до розділу 2

1. Основні поняття та класифікація чотириполіусників
2. Системи рівнянь лінійного пасивного чотириполіусника
3. Експериментальне визначення первинних параметрів чотириполіусника за дослідом холостого ходу та короткого замикання
4. Еквівалентні схеми чотириполіусників
5. Еквівалентні перетворення стандартних з'єднань чотириполіусників
6. Еквівалентні перетворення первинних параметрів при каскадному з'єднанні чотириполіусників
7. Еквівалентне перетворення первинних параметрів чотириполіусників при паралельному з'єднанні
8. Еквівалентне перетворення первинних параметрів чотириполіусників при послідовному з'єднанні
9. Схемні функції чотириполіусника
10. Характеристичні опори чотириполіусника
11. Узгоджений режим роботи чотириполіусника
12. Визначення характеристичних параметрів чотириполіусника з дослідів холостого ходу та короткого замикання

Список літератури до розділу 2

1. Бойко, В.С. Теоретичні основи електротехніки: Підручник у 3 т. за заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. – Т.1. [Текст] / В.С. Бойко, В.В. Бойко, В.Ф. Видолоб та ін. Усталені режими лінійних електричних кіл з зосередженими параметрами. – К.: Політехніка, 2004. – 272 с.

2. Коваль, Ю. В. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч. 2. [Текст] / Ю. В. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін. – Харків: Компанія СМІТ, 2008. – 560 с.

3. Бондаренко, В.Н. Основы теории цепей: учебное пособие. [Текст] / В.Н. Бондаренко, Г.Н. Арсеньев, А. В. Самков. – К.: Ин-т электродинамики НАН Украины, 2012. – 513 с.

4. Воробкевич, А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки [Текст] / А. Ю. Воробкевич, О. І. Шегедин, В. С. Маляр, Р. Я. Совин. – К.: Магнолія Плюс, 2004. – 224 с.

5. Шебес, М. Р. Сборник задач по теории линейных электрических цепей [Текст] / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Моделювання електромагнітних процесів в електричних колах з розподіленими параметрами

3.1.1. Загальна характеристика кіл з розподіленими параметрами

Розглянуті в попередніх розділах електричні кола з зосередженими параметрами характеризуються такими факторами.

- 1) Наявністю скінченної кількості ідеальних пасивних елементів, які повністю характеризуються залежностями струмів від напруг.
- 2) Струм у довільному перерізі вітки є одним і тим самим та залежить лише від часу.
- 3) Математично процеси описуються звичайними диференціальними рівняннями, побудова яких ґрунтується на законах Кірхгофа.

Відповідно до цих постулатів струм у колі на рис. 3.1, а визначається виразом

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\text{де } I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}; \omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

Якщо розглядати достатньо велику відстань l між джерелом і послідовним RLC - колом (рис.3.1, б) та врахувати кінцеву швидкість $v = \lambda / T = \lambda f$ поширення електричних зарядів, де λ – довжина хвилі електромагнітного поля, то час затримки перенесення зарядів буде залежати від координати x в напрямку лінії з'єднувальних провідників:

$$t_3 = \frac{x}{v} = \frac{x}{\lambda f}.$$

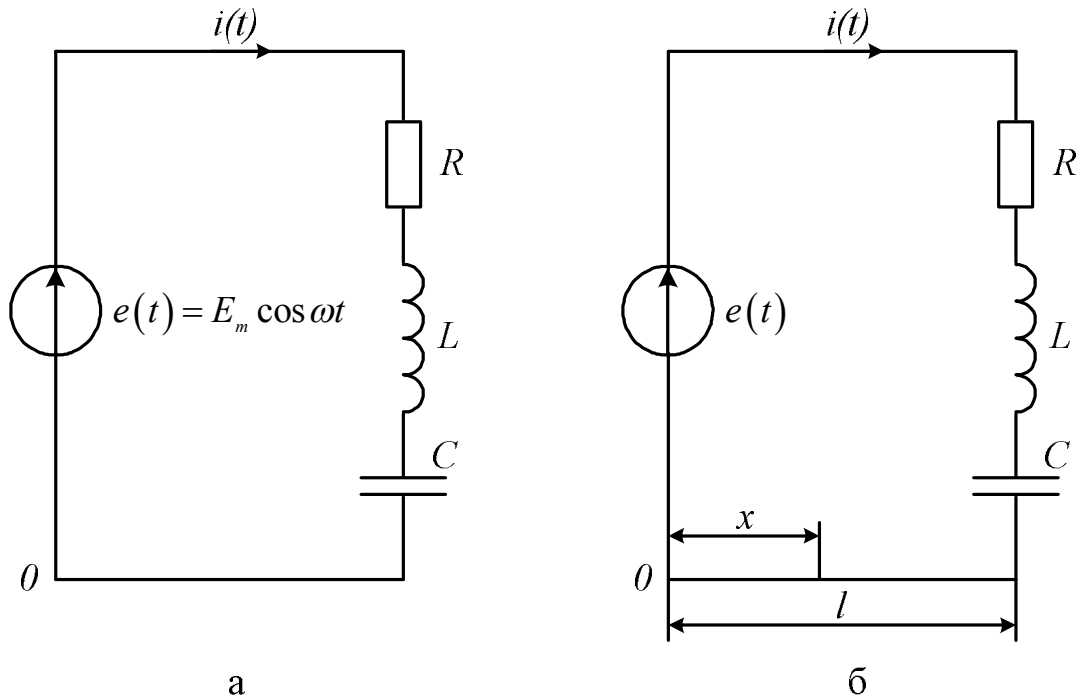


Рис. 3.1. Схеми електричних кіл: а – з зосередженими параметрами, б – з розподіленими параметрами

Відповідно, і величина струму в перетині кола, що визначається координатою x , буде залежати як від часу, так і від величини цієї координати:

$$i(t, x) = I_m \cos[\omega(t - t_3) - \varphi] = I_m \cos(\omega t - \omega x / \lambda f - \varphi) = I_m \cos(\omega t - 2\pi x / \lambda - \varphi).$$

Час затримки буде суттєвим, якщо геометричні розміри елементів кола або довжина з'єднувальних провідників l буде сумірною з довжиною хвилі λ , саме в цьому випадку застосовується модель **кола з розподіленими параметрами**.

Такі кола характеризуються наступними факторами:

- 1) значення струмів та напруг є функціями двох аргументів t та x ;
- 2) математично процеси в колах з розподіленими параметрами описуються диференціальними рівняннями у часткових похідних;
- 3) електричне коло з розподіленими параметрами може бути представлене так званою довгою лінією – сукупністю двох провідників загальної довжини $l > \lambda$, розділених діелектриком на відстані $d \ll \lambda$ (рис.3.2). Довга лінія може бути поділена на множину елементарних ділянок довжиною $\Delta x \ll \lambda$, причому кожен з таких ділянок можна розглядати як коло із зосередженими параметрами.

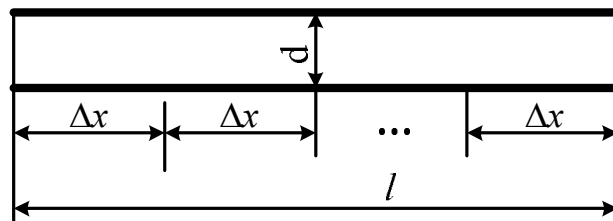


Рис. 3.2. Схема довгої лінії

Практичне застосування довгі лінії знаходять в діапазонах метрових ($f = 30 - 300$ МГц, $\lambda = 10 - 1$ м) та дециметрових хвиль ($f = 300 - 3000$ МГц, $\lambda = 1 - 0,1$ м) при конструктивному виконанні у вигляді двопровідної повітряної лінії, коаксіального кабелю чи мікροстрічкової лінії (рис.3.3).

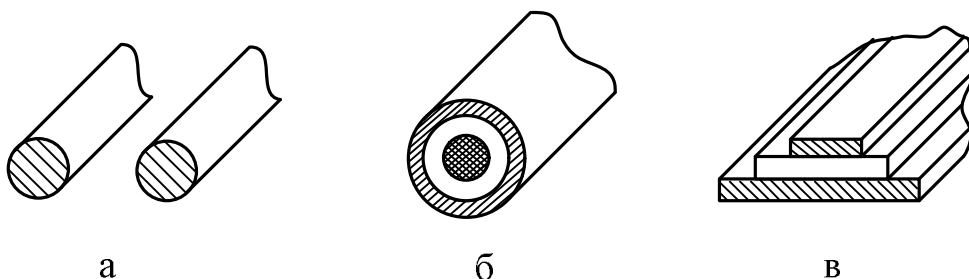


Рис. 3.3. Варіанти конструктивного виконання довгої лінії:

а – двопровідна повітряна лінія; б – коаксіальний кабель; в – мікροстрічкова лінія

3.1.2. Первинні параметри та диференційні рівняння однорідної довгої лінії

Найчастіше використовується схема елементарної ділянки довгої лінії (ДЛ) на рис. 3.4.

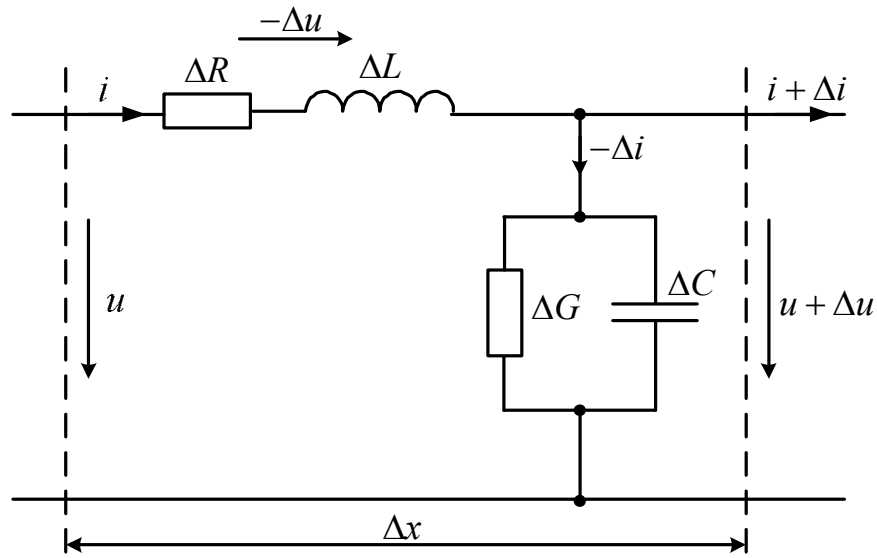


Рис. 3.4. Схема елементарної ділянки довгої лінії

Елементи ΔL та ΔC враховують накопичення енергії магнітними та електричними полями за рахунок струму в провідниках і ємності між ними, а елементи ΔR і ΔG – втрати енергії в провідниках та ізоляції між ними, при цьому $\Delta R \neq 1/\Delta G$. Зі збільшенням Δx зростають і величини параметрів ΔL , ΔC , ΔR , ΔG тому розглядають погонні параметри довгої лінії, які ще називають первинними параметрами:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{dL}{dx} - \text{погонна індуктивність} \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right];$$

$$C_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx} - \text{погонна ємність} \left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \right];$$

$$R_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{dR}{dx} - \text{погонний опір} \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right];$$

$$G_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = \frac{dG}{dx} - \text{погонна провідність} \left[\frac{C_M}{\text{м}} \right].$$

Довгі лінії є лінійними, якщо всі первинні параметри не залежать від часу, струму та напруги. Якщо хоча б один з перинних параметрів ДЛ залежить від часу, то вона називається **параметричною**. Якщо хоча б один з перинних параметрів ДЛ залежить від струму чи напруги, то ДЛ є **нелінійною**. Якщо первинні параметри не залежать від координати x , ДЛ називається **однорідною**. В неоднорідній лінії первинні параметри залежать від координати, тобто $L_1(x)$, $C_1(x)$.

Диференціальні рівняння однорідної лінії складаються на основі застосування законів Кірхгофа до елементарної ділянки лінії (рис. 3.4) та нехтуванням малими величинами порядку вище першого:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= i\Delta R + \Delta L \frac{\partial i}{\partial t} = iR_1\Delta x + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \Delta x; \\ -\Delta i &= u\Delta G + \Delta C \frac{\partial u}{\partial t} = uG_1\Delta x + C_1 \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x. \end{aligned}$$

Після ділення обох останніх рівнянь на Δx та здійснення граничного переходу отримуємо систему диференційних рівнянь ДЛ у часткових похідних:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Система рівнянь (3.1) називається телеграфними рівняннями, оскільки вперше була отримана при дослідженні телеграфних систем зв'язку.

3.1.3. Синусоїдний режим в однорідній довгій лінії

Цей режим має місце за умови синусоїдної форми напруги генератора на вході ДЛ, тоді всі напруги та струми є гармонічними функціями часу та можуть бути представлені комплексними величинами

$$u(x, t) \rightarrow \dot{U}(x)e^{j\omega t}; \quad i(x, t) \rightarrow \dot{I}(x)e^{j\omega t},$$

причому комплекси діючих значень $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ є функціями лише координати x .

Підставивши ці вирази в рівняння (3.1) та скоротивши на множник $e^{j\omega t}$, отримаємо систему комплексних рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}(x); \\ -\frac{\partial \dot{I}}{\partial x} = (G_1 + j\omega C_1)\dot{U}(x). \end{cases} \quad (3.2)$$

Виключивши з системи рівнянь (3.2) комплекс струму $\dot{I}(x)$, отримаємо

$$\frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial x^2} = (R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)\dot{U}.$$

Аналогічно, виключивши з системи (3.2) змінну $\dot{U}(x)$, отримаємо рівняння відносно \dot{I} :

$$\frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial x^2} = \gamma^2 \dot{I}, \quad (3.3)$$

де $\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}$ називається сталою поширення.

Як комплексна величина стала поширення може бути представлена у вигляді

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

де α – коефіцієнт загасання, β – коефіцієнт фази.

Характеристичне рівняння диференційного рівняння (3.3)

$$p^2 - \gamma^2 = 0$$

має два комплексні корені:

$$p_{1,2} = \mp \gamma = \mp \alpha \mp j\beta.$$

Тоді комплекс напруги записується у вигляді:

$$\dot{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (3.4)$$

де \underline{A}_1 та \underline{A}_2 – комплексні сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов, тобто значень напруги та струму на початку або в кінці лінії.

Знайдемо комплекс струму:

$$\dot{I}(x) = -\frac{1}{R_1 + j\omega L_1} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} (-\gamma \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \underline{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\underline{Z}_{XB}} (\underline{A}_1 e^{-\gamma x} - \underline{A}_2 e^{\gamma x}), \quad (3.5)$$

де $\underline{Z}_{XB} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}$ – хвильовий опір.

Отже, миттєве значення напруги

$$u(x,t) = \text{Re}[(A_{1m}e^{-\gamma x} + A_{2m}e^{\gamma x})e^{j\omega t}] = \text{Re}[(A_{1m}e^{j\psi_1}e^{-\alpha x - j\beta x} + A_{2m}e^{j\psi_2}e^{\alpha x + j\beta x})e^{j\omega t}] =$$

$$= A_{1m}e^{-\alpha x} \text{Re}[e^{j(\omega t - \beta x + \psi_1)}] + A_{2m}e^{\alpha x} \text{Re}[e^{j(\omega t + \beta x + \psi_2)}] = u_{\Pi}(x,t) + u_B(x,t), \quad (3.6)$$

де $u_{\Pi}(x,t) = A_{1m}e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1)$ – падаюча хвиля, $u_B(x,t) = A_{2m}e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2)$ – відбита хвиля.

Розглянемо графік падаючої хвилі (рис. 3.5, а). Амплітуда падаючої хвилі зменшується при збільшенні координати x , оскільки $\alpha > 0$. З плином часу ($t_2 > t_1$) точка хвилі з фіксованою фазою збільшує координату x , отже, складова $u_{\Pi}(x,t)$ переміщується від початку лінії до її кінця, тому вона називається прямою або падаючою хвилею. **Фазова швидкість хвилі** – швидкість переміщення точки хвилі з фіксованою фазою визначається виразом

$$v_{\phi} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi}{T\beta},$$

звідки довжина хвилі напруги

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

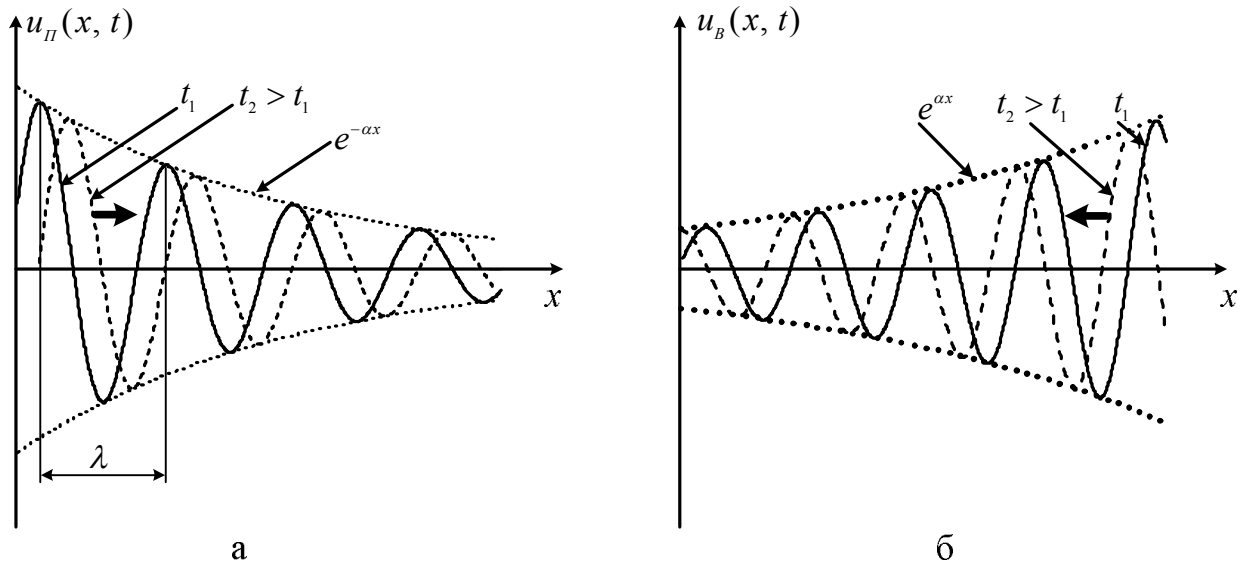


Рис. 3.5. Прямая (падаюча) (а) та відбита (зворотна) (б) хвиля

Відбита хвиля (рис. 3.5, б) з плином часу переміщається з кінця до початку лінії, зменшуючись за амплітудою, саме тому вона називається зворотною або відбитою хвилею.

3.1.4. Рівняння довгої лінії як чотириполюсника

Нехай \dot{U}_1 та \dot{I}_1 комплекси напруги та струму на початку лінії (рис. 3.6), тобто при $x = 0$.

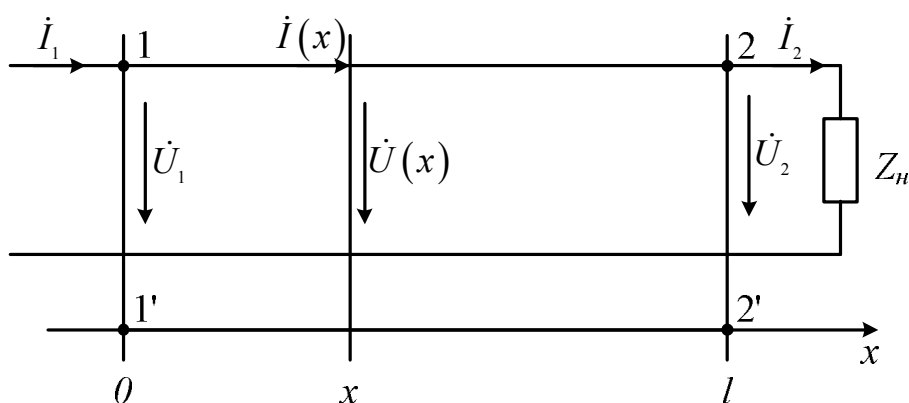


Рис. 3.6. Напруги та струми довгої лінії у різних перерізах

Тоді, підставивши ці значення в рівняння (3.4) та (3.5), матимемо систему рівнянь для визначення комплексних сталих інтегрування \underline{A}_1 та \underline{A}_2 :

$$\begin{cases} \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \dot{U}_1; \\ \underline{A}_1 - \underline{A}_2 = \dot{I}_1 Z_{XB}. \end{cases}$$

Визначимо з цієї системи

$$\underline{A}_1 = \frac{\dot{U}_1 + Z_{XB} \dot{I}_1}{2}, \underline{A}_2 = \frac{\dot{U}_1 - Z_{XB} \dot{I}_1}{2}.$$

Знайдемо зв'язок кінцевих (\dot{U}_2 та \dot{I}_2 при $x=l$) та початкових (\dot{U}_1 та \dot{I}_1 при $x=0$) значень струмів та напруг лінії:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_2 &= A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l} = \frac{\dot{U}_1 + Z_{XB} \dot{I}_1}{2} e^{-\gamma l} + \frac{\dot{U}_1 - Z_{XB} \dot{I}_1}{2} e^{\gamma l} = \\
 &= \dot{U}_1 \frac{e^{-\gamma l} + e^{\gamma l}}{2} - \dot{I}_1 Z_{XB} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = \dot{U}_1 \text{ch}(\gamma l) - Z_{XB} \dot{I}_1 \text{sh}(\gamma l), \\
 \dot{I}_2 &= \frac{A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}}{Z_{XB}} = \frac{\dot{U}_1 + Z_{XB} \dot{I}_1}{2 Z_{XB}} e^{-\gamma l} - \frac{\dot{U}_1 - Z_{XB} \dot{I}_1}{2 Z_{XB}} e^{\gamma l} = \\
 &= -\frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + \dot{I}_1 \frac{e^{-\gamma l} + e^{\gamma l}}{2} = -\frac{\dot{U}_1}{Z_{XB}} \text{sh}(\gamma l) + \dot{I}_1 \text{ch}(\gamma l).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Зворотний зв'язок змінних визначається виразом:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \text{ch} \gamma l + \dot{I}_2 \text{sh} \gamma l, \\
 \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \text{sh} \gamma l + \dot{I}_2 \text{ch} \gamma l.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Система рівнянь (3.8) характеризує ДЛ як симетричний узгоджено включений ЧП.

3.2. Вторинні параметри однорідної довгої лінії

3.2.1. Зв'язок вторинних параметрів однорідної довгої лінії з первинними

Під вторинними параметрами будемо розуміти сталу поширення

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta, \tag{3.9}$$

де α – коефіцієнт загасання, β – коефіцієнт фази,
та хвильовий опір

$$Z_{XB} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}.$$

Для знаходження безпосереднього зв'язку α та β з первинними параметрами R_1 , G_1 , L_1 , C_1 та частотою ω піднесемо до квадрату ліву і праву частини рівняння (3.9):

$$(R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1) + j\omega(L_1 G_1 + R_1 C_1) = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta.$$

Прирівнювання до 0 дійсної та уявної частин останнього виразу дає систему рівнянь для визначення α та β :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = R_1 G_1 - \omega^2 L_1 C_1; \\ 2\alpha\beta = \omega(L_1 G_1 + R_1 C_1). \end{cases}$$

Точний розв'язок цієї системи достатньо громіздкий та малоінформативний. Для побудови приблизної залежності α та β від частоти розглянемо граничні випадки:

1) $\omega \rightarrow 0$, тоді

2)

$$\gamma = \sqrt{R_1 G_1} = \alpha + j \cdot 0;$$

$$\alpha = \sqrt{R_1 G_1}; \beta = 0.$$

3) $\omega \rightarrow \infty$.

Перетворимо вираз для γ за правилами оперування з нескінченно малими.

$$\begin{aligned}
\gamma &= j\omega\sqrt{L_1 C_1} \sqrt{\left(1 - j\frac{R_1}{\omega L_1}\right)\left(1 - j\frac{G_1}{\omega C_1}\right)} = \left|(1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\alpha}{2}\right| = \\
&= j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left(1 - j\frac{R_1}{2\omega L_1}\right)\left(1 - j\frac{G_1}{2\omega C_1}\right) = |(1 - \alpha)(1 - \beta) = 1 - \alpha - \beta| = \\
&= j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left[1 - j\frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{\sqrt{L_1 / C_1}} + \frac{G_1}{\sqrt{C_1 / L_1}}\right) + j\omega\sqrt{L_1 C_1}.
\end{aligned}$$

Введемо граничне значення хвильового опору

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Z_{XB} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \rho,$$

тоді матимемо граничні значення коефіцієнтів згасання та фази:

$$\alpha_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1}{\rho} + G_1 \rho\right); \quad \beta_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \beta = \omega\sqrt{L_1 C_1}.$$

Побудуємо графіки зазначених вторинних параметрів від кругової частоти (рис. 3.7).

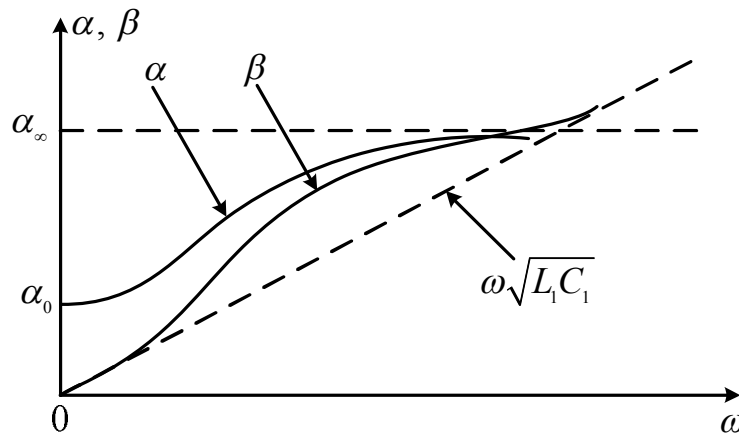


Рис. 3.7. Графіки залежності вторинних параметрів ДЛ від частоти

Таким чином, граничне значення коефіцієнта затухання не залежить від частоти, а граничне значення коефіцієнта фази прямо пропорційне частоті.

3.2.2. Однорідна лінія без спотворень

Лінійна система передає сигнал без спотворень, якщо повністю зберігається його форма на вході та виході системи. Аналітична умова для передачі сигналу без спотворень в часовій області

$$S_{\text{вих}}(t) = k S_{\text{вх}}(t - t_0), \quad (3.10)$$

де t_0 – час затримки; k – сталий множник, що відповідає коефіцієнту передачі лінійної системи. Взявши перетворення Фур'є від обох частин рівняння (3.10), матимемо умову для передачі сигналу без спотворень в частотній області:

$$S_{\text{вих}}(\omega) = k e^{-j\omega t_0} S_{\text{вх}}(\omega). \quad (3.11)$$

Таким чином, комплексна частотна характеристика (КЧХ) неспотворюючої системи визначається виразом:

$$k(j\omega) = \frac{S_{\text{вих}}(\omega)}{S_{\text{вх}}(\omega)} = k e^{-j\omega t_0}. \quad (3.12)$$

Виділивши модуль та аргумент комплексної величини $k(j\omega)$, матимемо вираз для АЧХ та ФЧХ неспотворюючої системи:

$$k(\omega) = k = \text{const};$$

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0.$$

Отже, для неспотворюючої лінійної системи АЧХ є сталою величиною, що не залежить від частоти, ФЧХ має прямо пропорційну залежність від частоти.

Стосовно однорідної довгої лінії умови неспотворюючої передачі сигналу зводяться до наступних:

$$\alpha = \text{const};$$

$$\beta \propto \omega.$$

Розглянемо однорідну лінію з первинними параметрами, що задовольняють пропорції:

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{C_1}{G_1}. \quad (3.13)$$

Тоді коефіцієнт поширення перетворюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \sqrt{R_1 G_1} \sqrt{\left(1 + j\omega \frac{L_1}{R_1}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_1}{G_1}\right)} = \\ &= \sqrt{R_1 G_1} \left(1 + j\omega \frac{L_1}{R_1}\right) = \sqrt{R_1 G_1} + j\omega \sqrt{L_1} \sqrt{\frac{L_1 G_1}{R_1}} = \sqrt{R_1 G_1} + j\omega \sqrt{L_1 C_1}. \end{aligned}$$

Таким чином, за умови (3.13)

$$\alpha = \sqrt{R_1 G_1}; \quad \beta = \omega \sqrt{L_1 C_1},$$

тобто виконуються умови неспотворюючої передачі сигналів, тому довга лінія, в якій забезпечується пропорція (3.13) називається лінією без спотворення.

Значення хвильового опору лінії без спотворень

$$Z_{XB} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{R_1}{G_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Оскільки значення хвильового опору лінії без спотворення є дійсною величиною, для будь-якої точки лінії відношення миттєвих значень струмів і напруг

$$\frac{u(t, x)}{i(t, x)} = \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Звідси випливає рівність енергій

$$\frac{C_1 u^2}{2} = \frac{L_1 i^2}{2},$$

тобто для будь-якого перетину лінії без спотворень електрична енергія дорівнює магнітній енергії.

Знайдемо вираз для фазової швидкості – швидкості руху точки хвилі з фіксованою фазою, продиференціювавши аргумент виразу для падаючої хвилі $u_{II}(x, t) = A_{1m} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1)$:

$$v_\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \text{const.}$$

Таким чином, в лінії без спотворень фазова швидкість є однаковою для усіх спектральних складових сигналу, що передається.

На практиці для реально існуючих первинних параметрів

$$\frac{L_1}{R_1} < \frac{C_1}{G_1},$$

тому для забезпечення неспотвореної передачі через певні відстані встановлюються котушки індуктивності, або застосовується кабель, обмотаний стрічкою з магнітного матеріалу, що підвищує параметр L_1 .

3.2.3. Однорідна лінія без втрат

Так називають ідеалізовану довгу лінію, в якій втратами активної потужності можна знехтувати, тобто, значення відповідних первинних параметрів наближаються до нуля:

$$R_1 \rightarrow 0, G_1 \rightarrow 0.$$

Для ДЛ без втрат коефіцієнт поширення

$$\gamma = \sqrt{j\omega L_1 j\omega C_1} = j\omega \sqrt{L_1 C_1} = 0 + j\beta,$$

звідки коефіцієнт затухання

$$\alpha = 0 = \text{const};$$

коефіцієнт фази

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}.$$

Отже, лінія без втрат є лінією без спотворень, але не навпаки. Звідси випливає, що для лінії без втрат

$$Z_{XB} = \rho; v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Отримаємо розв'язок телеграфних рівнянь лінії без втрат (рис. 3.8).

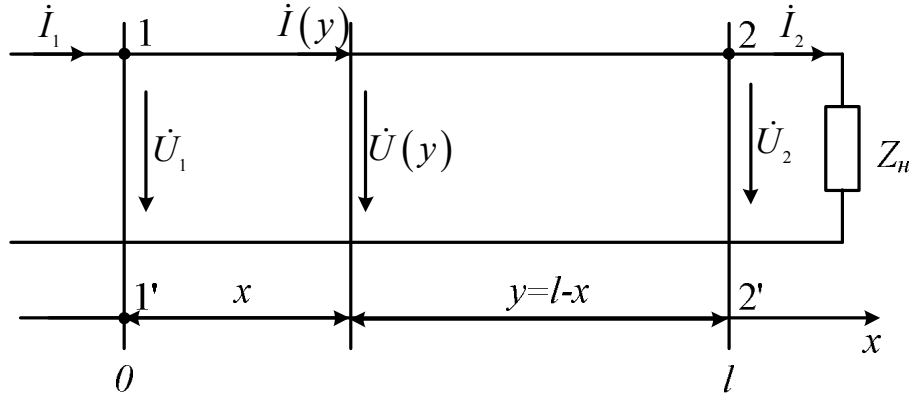


Рис. 3.8. Система координат в лінії без спотворень

Для цього перетворимо систему рівнянь (3.8), замінивши l на y , $\gamma \rightarrow \beta$, $Z_{XB} \rightarrow \rho$ та перетворивши гіперболічні функції для уявного аргументу:

$$\begin{aligned} ch(jx) &= \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \cos x; \\ sh(jx) &= \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx}) = j \sin x. \end{aligned}$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{U}(y) &= \dot{U}_2 \cos(\beta y) + j\rho \dot{I}_2 \sin(\beta y), \\ \dot{I}(y) &= j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin(\beta y) + \dot{I}_2 \cos(\beta y). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Система рівнянь (3.14) буде використана при розгляді режиму стійних хвиль.

3.3. Режими біжних, стійних та змішаних хвиль в лінії без втрат

3.3.1. Вхідний опір однорідної лінії без втрат

Відповідно до системи рівнянь (3.14) в будь-якому перерізі ОДЛ без втрат ($\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L_1C_1}$; $Z_{XB} = \sqrt{L_1/C_1}$) з координатою y , що відраховується від кінця лінії, діючі значення напруги та струму визначаються виразами

$$\begin{aligned}\dot{U}(y) &= \dot{U}_2 \cos(\beta y) + j\rho \dot{I}_2 \sin(\beta y); \\ \dot{I}(y) &= j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin(\beta y) + \dot{I}_2 \cos(\beta y),\end{aligned}$$

де \dot{U}_2, \dot{I}_2 відповідні значення напруги та струму на кінці лінії, тобто при $y = 0$.

Розглянемо режим вихідного короткого замикання лінії, тобто $\dot{U}_2 = 0$. Тоді вхідний опір лінії в перерізі з координатою y

$$Z_{BX}^{K3}(y) = \frac{\dot{U}(y)}{\dot{I}(y)} = \frac{j\rho \dot{I}_2 \sin(\beta y)}{\dot{I}_2 \cos(\beta y)} = j\rho \operatorname{tg}(\beta y). \quad (3.15)$$

Оскільки ρ, β, y є дійсними величинами, то вхідний опір лінії має реактивний характер. Побудуємо графік залежності відносного реактивного опору лінії $X_{BX}^{K3} / \rho = \operatorname{tg}(\beta y)$ від координати y з урахуванням того, що довжина хвилі $\lambda = v_\phi T = \omega T / \beta = 2\pi / \beta$, тобто перший максимум реактивного опору припадає на координату $y_1 = \pi / 2\beta = \lambda / 4$ (рис. 3.9).

В інтервалі координат $0 < \beta y < \frac{\pi}{2}$ $X_{BX}^{K3} > 0$ і вхідний опір короткозамкненої лінії має індуктивний характер. В інтервалі координат $\frac{\pi}{2} < \beta y < \pi$ $X_{BX}^{K3} < 0$ і вхідний опір короткозамкненої лінії має ємнісний характер. Таким чином, змінюючи довжину відрізка короткозамкненої лінії, можна створювати різні за величиною індуктивні та ємнісні опори. Відрізок короткозамкненої на кінці лінії без втрат довжиною $l = \lambda / 4$ теоретично має нескінченний вхідний опір, що дозволяє застосовувати його як ізолятор при підвішуванні проводів.

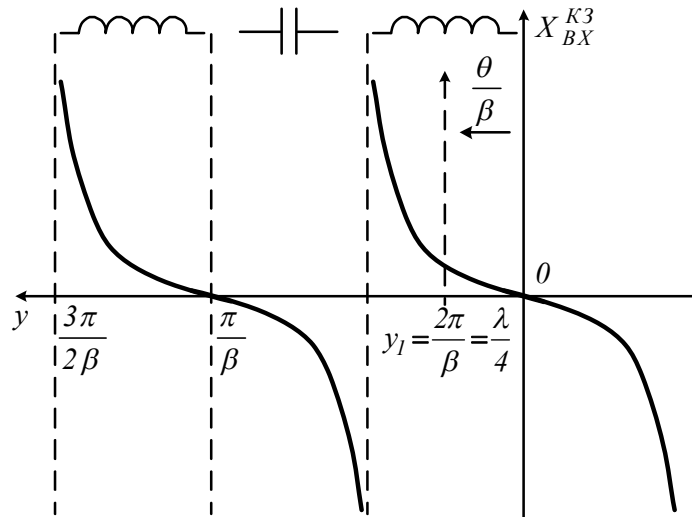


Рис. 3.9. Залежність відносного реактивного опору короткозамкненої лінії від координати

Розглянемо режим холостого ходу лінії, тобто $I_2 = 0$. Тоді вхідний опір лінії в перерізі з координатою y

$$Z_{BX}^{XX}(y) = \frac{\dot{U}_2 \cos(\beta y)}{j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin(\beta y)} = -j\rho \operatorname{ctg}(\beta y) = j\rho \operatorname{tg}(\beta y - \frac{\pi}{2}) = j\rho \operatorname{tg}[\beta(y - \frac{\lambda}{4})].$$

(3.16)

Графік залежності реактивного опору від координати можна одержати з попереднього графіка, зсунувши вертикальну вісь на $\lambda / 4$ (рис. 3.10).

В режимі реактивного навантаження ОДЛ без втрат $Z_H = jX_H$; $U_H = jX_H \dot{I}_2$ і вираз для вхідного опору набуває вигляду

$$\begin{aligned} Z_{BX}^P(y) &= \frac{j\dot{I}_2 X_H \cos(\beta y) + j\rho \dot{I}_2 \sin(\beta y)}{j \frac{j\dot{I}_2 X_H}{\rho} \sin(\beta y) + \dot{I}_2 \cos(\beta y)} = j\rho \frac{(X_H/\rho) \cos(\beta y) + \sin(\beta y)}{\cos(\beta y) - (X_H/\rho) \sin(\beta y)} = \\ &= j\rho \frac{(X_H/\rho) + \operatorname{tg}(\beta y)}{1 - (X_H/\rho) \operatorname{tg}(\beta y)} = j\rho \frac{\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}(\beta y)}{1 - \operatorname{tg}(\theta) \operatorname{tg}(\beta y)} = \\ &= j\rho \operatorname{tg}(\beta y + \theta) = j\rho \operatorname{tg}[\beta(y + \theta\lambda / 2\pi)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

де $\operatorname{tg}(\theta) = X_H / \rho$.

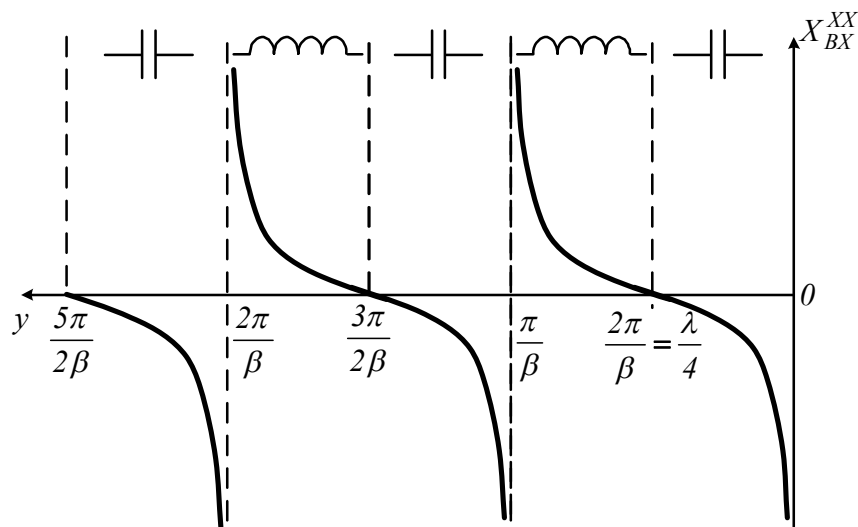


Рис. 3.10. Залежність відносного реактивного опору розімкненої лінії від координати

Таким чином, вхідний опір лінії, навантаженої на реактивність, також змінюється за тангенсоїдою, початок якої зміщується при індуктивному навантаженні ($X_H > 0$) на відстань $\frac{\theta\lambda}{2\pi} > 0$ (пунктир на рис. 3.8), при ємнісному навантаженні ($X_H < 0$) на відстань $\frac{\theta\lambda}{2\pi} < 0$.

В режимі узгодженого навантаження, який має місце при виборі опору навантаження $Z_H = \rho = \sqrt{L_1 / C_1}$, тоді $\dot{U}_2 = \rho \dot{I}_2$ і

$$Z_{BX}^y(y) = \frac{\dot{I}_2 \rho \cos(\beta y) + j \dot{I}_2 \rho \sin(\beta y)}{j \frac{\dot{I}_2 \rho}{\rho} \sin(\beta y) + \dot{I}_2 \cos(\beta y)} = \rho. \quad (3.18)$$

В режимі узгодженого навантаження ОДЛ без втрат в довільному перерізі вхідний опір дорівнює величині хвильового опору.

3.3.2. Стійні, біжні та змішані хвилі в довгій лінії без втрат

В перших трьох розглянутих режимах енергія в навантаження не передається, і в лінії за рахунок взаємодії падаючої та відбитої хвилі утворюється **стійна** електромагнітна хвиля. Вона характеризується тим, що координати максимумів струмів та напруг, які називаються пучностями, та координатами мінімумів струмів та напруг, які називаються вузлами хвилі, не змінюються в часі, тобто фазова швидкість хвилі дорівнює нулю. Простежимо режим стійних хвиль на прикладі режиму холостого ходу ($\dot{I}_2 = 0$). Діючи значення напруги та струму

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos(\beta y); \dot{I}(y) = j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin(\beta y).$$

Їм відповідають миттєві значення

$$u(y, t) = \sqrt{2}U_2 \cos(\beta y) \cos(\omega t);$$

$$i(y, t) = \frac{\sqrt{2}U_2}{\rho} \sin(\beta y) \cos(\omega t + \pi / 2).$$

Графіки залежності миттєвих значень напруги та струму для фіксованих моментів часу подані на рис. 3.11.

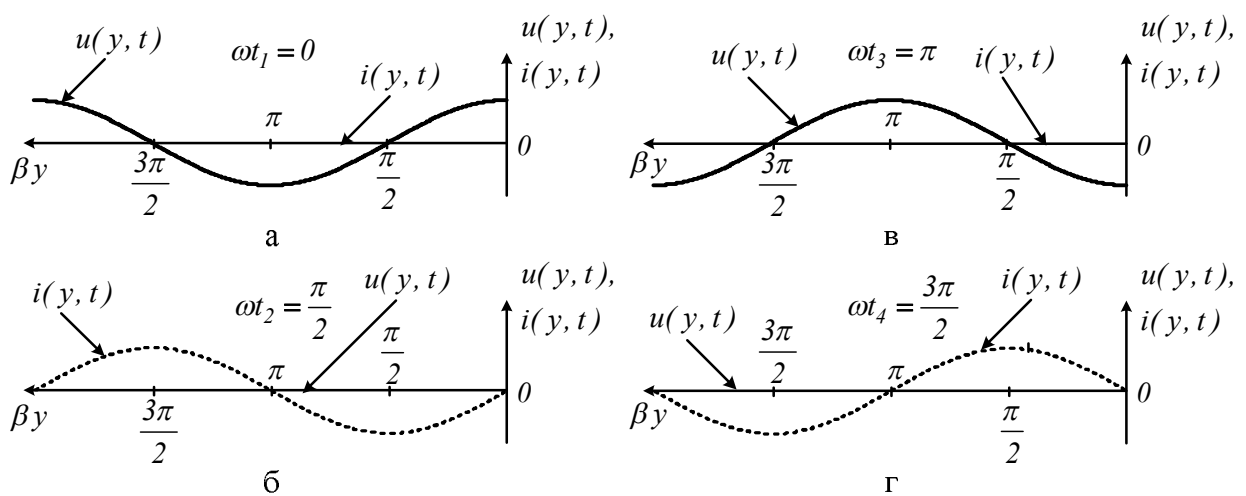


Рис. 3.11. Миттєві значення напруги та струму при стійних хвилях

За результатами розгляду цих графіків на рис. 3.12, а побудовані залежності діючих значень напруг та струмів від координати в режимі стійних хвиль. З них випливає, що стійні хвилі напруги та струму зсунуті в просторі на чверть довжини хвилі $\lambda / 4$ та зсунуті в часі на кутову величину $\omega t = \pi / 2$. При цьому електромагнітна енергія в навантаження не передається, однак на кожному відрізку лінії, що дорівнює $\lambda / 4$, накопичується однакова електромагнітна енергія.

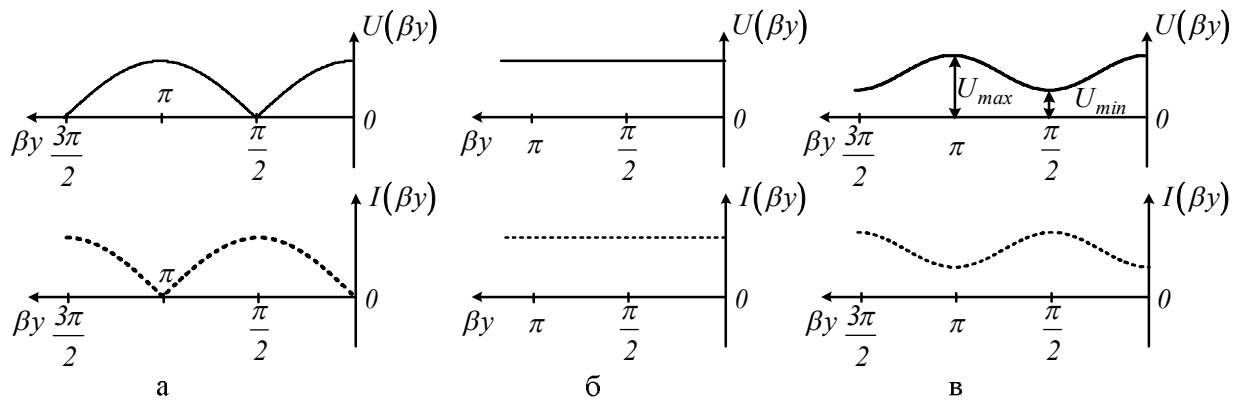


Рис. 3.12. Залежності діючих значень напруг та струмів:
а – в режимі стійних хвиль; б – в режимі біжних хвиль; в – в режимі змішаних хвиль

Режим **біжних** хвиль спостерігається в однорідній лінії без втрат при узгодженому навантаженні $Z_H = \rho = \sqrt{L_1 / C_1}$, тоді $\dot{U}_2 = \rho \dot{I}_2$ і

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos(\beta y) + j \dot{U}_2 \sin(\beta y) = \dot{U}_2 [\cos(\beta y) + j \sin(\beta y)] = \dot{U}_2 e^{j\beta y},$$

$$U_2 = \text{const};$$

$$\dot{I}(y) = j \dot{I}_2 \sin(\beta y) + \dot{I}_2 \cos(\beta y) = \dot{I}_2 e^{j\beta y},$$

$$I_2 = \text{const}.$$

Таким чином, в режимі біжних хвиль однорідної лінії без втрат в довільному перерізі діючі значення напруг та струмів однакові (рис. 3.12, б). Це зумовлене тим, що амплітуда відбитої хвилі дорівнює нулю і енергія передається в навантаження зі сталою фазовою швидкістю $v_\phi = 1 / \sqrt{L_1 C_1}$.

У випадку, коли опір навантаження не дорівнює хвильовому, виникає режим **змішаних** хвиль, тобто комбінація біжної та стійної хвилі. Уведемо $m = \rho / R_H \neq 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \dot{U}(y) &= \dot{U}_2 \cos(\beta y) + j \frac{\dot{U}_2}{Z_H} \rho \sin(\beta y) = \dot{U}_2 [\cos(\beta y) + j m \sin(\beta y)], \\ \dot{I}(y) &= j \frac{\dot{U}_2}{\rho} \sin(\beta y) + \frac{\dot{U}_2}{Z_H} \cos(\beta y) = \frac{\dot{U}_2}{\rho} [m \cos(\beta y) + j \sin(\beta y)], \end{aligned}$$

а діючі значення напруги та струму визначаються виразами

$$\begin{aligned} U(y) &= U_2 \sqrt{\cos^2(\beta y) + m^2 \sin^2(\beta y)}; \\ I(y) &= \frac{U_2}{\rho} \sqrt{m^2 \cos^2(\beta y) + \sin^2(\beta y)}. \end{aligned}$$

При цьому

$$U^2(y) + \rho^2 I^2(y) = U_2^2 (1 + m^2) = \text{const.}$$

Графік залежності напруги від координати лінії (рис. 3.12, в) має максимуми та мінімуми. Для кількісної оцінки степені узгодженості лінії з навантаженням вводять коефіцієнт біжної хвилі

$$k_{BX} = U_{MIN} / U_{MAX} = I_{MIN} / I_{MAX}.$$

Для режиму біжних хвиль цей коефіцієнт дорівнює одиниці, для режиму стійних хвиль – нулю.

3.4. Застосування електричних кіл з розподіленими параметрами

3.4.1. Чвертьхвильовий трансформатор

Чвертьхвильовий трансформатор (ЧХТ) призначений для узгодження лінії без втрат з хвильовим опором ρ_1 з активним навантаженням $R_n \neq \rho_1$ і є відрізком лінії без втрат з хвильовим опором ρ_2 та довжиною, що дорівнює чверті довжини хвилі (рис. 3.13).

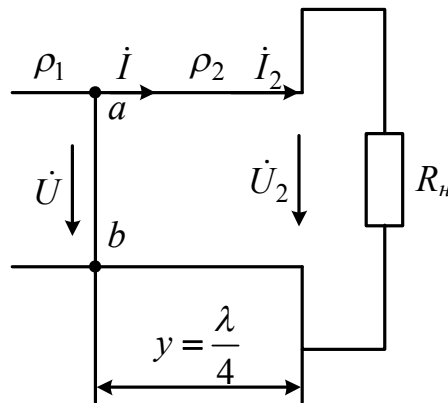


Рис. 3.13. Узгодження лінії без втрат з активним навантаженням за допомогою ЧХТ

Діючі значення напруги та струму в перетині ab , тобто при $y = \lambda / 4$ описуються системою рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_2 \cos(\beta\lambda / 4) + j\rho_2 \dot{I}_2 \sin(\beta\lambda / 4); \\ \dot{I}_{ab} &= j \frac{\dot{U}_2}{\rho_2} \sin(\beta\lambda / 4) + \dot{I}_2 \cos(\beta\lambda / 4), \end{aligned}$$

де \dot{U}_2, \dot{I}_2 відповідні діючі значення напруги та струму на кінці лінії, тобто в точках підключення навантаження, причому $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 R_n$.

Знайдемо вхідний опір відносно затискачів ab з урахуванням того, що $\beta\lambda / 4 = \pi / 2$:

$$Z_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}_{ab}} = \frac{\dot{I}_2 R_n \cos(\pi / 2) + j \rho_2 \dot{I}_2 \sin(\pi / 2)}{j \frac{\dot{I}_2 R_n}{\rho_2} \sin(\pi / 2) + \dot{I}_2 \cos(\pi / 2)} = \frac{\rho_2^2}{R_n}$$

Призначення ЧХТ полягає в тому, щоб забезпечити на затискачах ab узгоджений опір навантаження для лінії з хвильовим опором ρ_1 . Тому величину параметра ρ_2 підбирають з таким розрахунком, що $\rho_2^2 / R_n = \rho_1$, тобто

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1 R_n}. \quad (3.19)$$

при цьому в лінії з хвильовим опором ρ_1 встановлюється оптимальний режим біжних хвиль. Таким чином, призначення ЧХТ – це узгоджуючий пристрій антенно-фідерних пристроїв.

3.4.2. Довга лінія як резонансне коло

Покажемо, що чвертьхвильова розімкнена на кінці лінія з малими втратами має властивість високодобротного послідовного RLC -контур. З системи рівнянь (3.7) при $\dot{I}_2 = 0$ отримаємо вираз для вхідного опору

$$\begin{aligned} Z_{BX} &= \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma \lambda / 4)}{\frac{\dot{U}_2}{Z_{XB}} \operatorname{sh}(\gamma \lambda / 4)} = Z_{XB} \frac{\operatorname{ch}(\alpha \lambda / 4 + j \beta \lambda / 4)}{\operatorname{sh}(\alpha \lambda / 4 + j \beta \lambda / 4)} = \\ &= Z_{XB} \frac{\operatorname{ch}(\alpha \lambda / 4) \operatorname{ch}(j \beta \lambda / 4) + \operatorname{sh}(\alpha \lambda / 4) \operatorname{sh}(j \beta \lambda / 4)}{\operatorname{sh}(\alpha \lambda / 4) \operatorname{ch}(j \beta \lambda / 4) + \operatorname{ch}(\alpha \lambda / 4) \operatorname{sh}(j \beta \lambda / 4)} = \\ &= Z_{XB} \frac{\cos(\beta \lambda / 4) + j(\alpha \lambda / 4) \sin(\beta \lambda / 4)}{(\alpha \lambda / 4) \cos(\beta \lambda / 4) + j \sin(\beta \lambda / 4)} \approx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx Z_{XB} \frac{\cos(\beta\lambda / 4) + j(\alpha\lambda / 4)}{0 + j} \approx \frac{\rho\alpha\lambda}{4} \left[1 - j \frac{\cos(\omega_0\lambda / 4v_\phi + \Delta\omega\lambda / 4v_\phi)}{\alpha\lambda / 4} \right] = \\
&= \frac{\rho\alpha\lambda}{4} \left[1 - j \frac{\cos(\pi/2 + \Delta\omega\lambda / 4v_\phi)}{\alpha\lambda / 4} \right] = \frac{\rho\alpha\lambda}{4} \left[1 + j \frac{\sin(\Delta\omega\lambda / 4v_\phi)}{\alpha\lambda / 4} \right] \approx \\
&\approx \frac{\rho\alpha\lambda}{4} \left[1 + j \frac{\Delta\omega\lambda / 4v_\phi}{\alpha\lambda / 4} \right] = \frac{\rho\alpha\lambda}{4} \left[1 + j \frac{\beta}{\alpha} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right],
\end{aligned}$$

де $\rho = \sqrt{L_1 / C_1}$ – наближене значення хвильового опору, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – кругова резонансна частота, яка встановлена з умови, що на довжині розімкненого відрізка вкладається рівно чверть довжини хвилі, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ – абсолютна розстройка частоти.

Із порівняння з відомою формулою для вхідного опору послідовного резонансного контуру

$$Z_{BX} = R(1 + jQ\xi) = R \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \approx R \left(1 + j2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)$$

де R активний опір, ξ – узагальнена розстройка послідовного контуру, доходимо висновку, що $R_E = \rho\alpha\lambda / 4$ – еквівалентний опір; $Q_E = \beta / 2\alpha$ – еквівалентна добротність чвертьхвильового розімкненого відрізка довгої лінії.

Проаналізувавши умову резонансу

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{v_\phi T}{4} \approx \frac{2\pi}{4\omega_0 \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\pi}{2\omega_0 \sqrt{L_1 C_1}},$$

знайдемо вираз для кругової резонансної частоти:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2l\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (3.20)$$

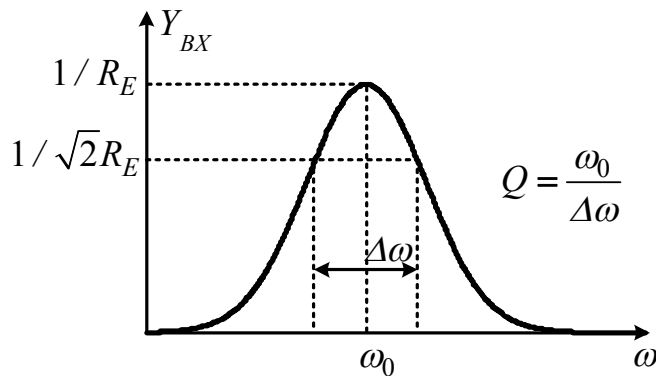


Рис. 3.14

Перевагою резонансних кіл, побудованих на довгих лініях, є висока добротність, яка при малих втратах може досягти величину в декілька тисяч.

3.4.3. Еквівалентний чотириполюсник для відрізка лінії з розподіленими параметрами

Відрізок лінії довжиною l та коефіцієнтом поширення $\gamma = \alpha + j\beta$ має такий зв'язок між вхідними та вихідними електричними змінними.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\gamma l) + \dot{I}_2 Z_{x\phi} \operatorname{sh}(\gamma l); \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{x\phi}} \operatorname{sh}(\gamma l) + \dot{I}_2 \operatorname{ch}(\gamma l). \end{cases} \quad (3.21)$$

З іншого боку, вхідні та вихідні змінні чотириполюсника описуються наступною системою А-параметрів.

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = a_{11}\dot{U}_2 + a_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = a_{21}\dot{U}_2 + a_{22}\dot{I}_2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Із порівняння виразів для систем (3.21) та (3.22) встановлюємо параметри представлення довгої лінії еквівалентним симетричним чотириполіусником:

$$a_{11} = a_{22} = ch(\gamma l);$$

$$a_{12} = Z_{x\theta} sh(\gamma l);$$

$$a_{21} = \frac{1}{Z_{x\theta}} sh(\gamma l).$$

При використанні симетричної ($Z_1 = Z_3$) Т-подібної схеми заміщення чотириполіусника (рис. 2.2, б) значення опорів знаходяться за формулами:

$$Z_2 = \frac{1}{a_{21}} = \frac{Z_{x\theta}}{sh(\gamma l)};$$

$$Z_1 = \frac{a_{11} - 1}{a_{21}} = \frac{Z_{x\theta}[sh(\gamma l) - 1]}{sh(\gamma l)}.$$

Контрольні запитання до розділу 3

1. Загальна характеристика кіл з розподіленими параметрами.
2. Первинні параметри однорідної довгої лінії.
3. Диференційні рівняння однорідної довгої лінії.
4. Синусоїдний режим в однорідній довгій лінії.
5. Рівняння довгої лінії як чотириполюсника.
6. Вторинні параметри однорідної довгої лінії.
7. Зв'язок вторинних параметрів однорідної лінії з первинними.
8. Однорідна лінія без спотворень.
9. Однорідна лінія без втрат.
10. Вхідний опір однорідної лінії без втрат.
11. Режим стійних хвиль в довгій лінії без втрат.
12. Режим біжних та змішаних хвиль в довгій лінії без втрат.
13. Чвертьхвильовий трансформатор (ЧХТ).
14. Довга лінія як резонансне коло.
15. Параметри еквівалентного чотириполюсника для відрізка лінії з розподіленими параметрами

Список літератури до розділу 3

6. Коваль, Ю. В. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч. 2 [Текст] / Ю. В. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін. – Харків: Компанія СМІТ, 2008. – 560 с.
7. Бондаренко, В.Н. Основы теории цепей: учебное пособие. [Текст] / В. Н. Бондаренко, Г. Н. Арсеньев, А. В. Самков. – К.: Ин-т электродинамики НАН Украины, 2012. – 513 с.
8. Воробкевич, А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки [Текст] / А. Ю. Воробкевич, О. І. Шегедин, В. С. Маляр, Р.

Я. Совин. – К.: Магнолія Плюс, 2004. – 224 с.

9. Шебес, М. Р. Сборник задач по теории линейных электрических цепей [Текст] / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.